LANZAMIENTO HACIA ARRIBA POR UN PLANO INCLINADO

1.- Por un plano inclinado de ángulo "α" y sin rozamiento, se lanza hacia arriba una masa "m" con una velocidad "v_o". Se pide:

a) Fuerza o fuerzas que actúan sobre "m" después de haber sido lanzada.

b) ¿De qué factores crees que puede depender el recorrido sobre el plano y la altura máxima alcanzada? Utiliza las ecuaciones del movimiento para comprobar tus predicciones.

c) Si el ángulo del plano inclinado es 20º, la masa lanzada de 3 kg y la velocidad inicial de 20 m/s , se pide: posición y velocidad a los 4s y a los 9s de su lanzamiento.

2.- Si sobre un plano inclinado similar al del apartado 1, pero con rozamiento entre la masa y el plano, de coeficiente "μ", se lanza hacia arriba la masa "m" con una velocidad "v_o", se pide:

a) Fuerza o fuerzas que actúan sobre la masa después de haber sido lanzada, tanto cuando sube como cuando baja.

b) ¿La aceleración de subida es la misma que la de bajada?

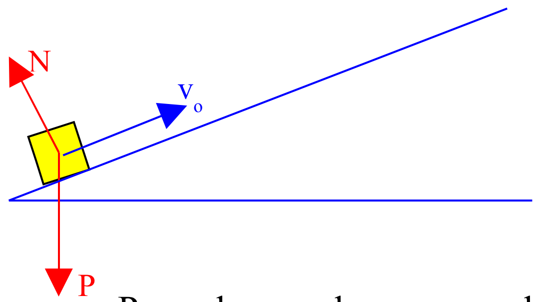
c) ¿En qué condiciones la masa lanzada queda sobre el plano a una determinada altura y no baja?

d) Si el plano inclinado presenta un ángulo de 20º y un coeficiente de rozamiento de 0´2, la masa es de 3 kg y la velocidad v_o=20 m/s ¿ qué espacio recorre sobre el plano y qué altura máxima alcanza?

Tómese g = 9´8 N/Kg y, considérese que el coeficiente de rozamiento por deslizamiento coincide con el coeficiente de rozamiento estático

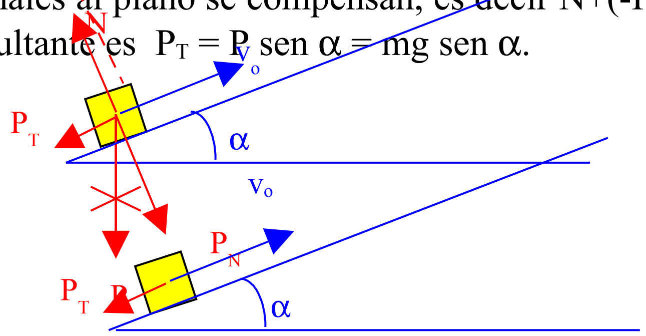
Cuando nos hablen de "lanzamiento" significa que, unos instantes antes se ha actuado sobre la masa con una fuerza F durante un corto intervalo de tiempo, para dotarla de la velocidad v_o . El problema se plantea <u>después</u> de este hecho, cuando la masa sube por el plano inclinado, y luego, baja por el mismo.

a) Las fuerzas que actúan sobre "m" después de haber sido lanzada, serán: el peso P de dicha masa (debida a la interacción con la Tierra) y la "normal" N del plano inclinado (debida a la rigidez del plano y como interacción con el mismo). No actúa ninguna otra fuerza.



La fuerza peso P, podemos descomponerla en dos fuerzas, una perpendicular al plano P_N y otra paralela al mismo P_T.

Como $P_N = P \cos \alpha$ y $P_T = P \operatorname{sen} \alpha$ (por geometría del dibujo), las fuerzas normales al plano se compensan, es decir $N+(-P_N) = 0$, con lo que la fuerza resultante es $P_T = P \operatorname{sen} \alpha = mg \operatorname{sen} \alpha$.



Luego, la aceleración del movimiento será:

$mg \operatorname{sen} \alpha = ma$ $\qquad\qquad$ $a= g \operatorname{sen} \alpha$

que en nuestro caso , si establecemos un criterio de signos a lo largo del plano serán v_o positiva y a negativa.

b) El recorrido sobre el plano hasta pararse y volver a bajar sobre el mismo puede depender de la velocidad de lanzamiento "v_o" (a mayor velocidad mayor recorrido) y del ángulo del plano α (a mayor ángulo menor recorrido) y, en principio podríamos pensar que puede depender de la masa lanzada "m" (a mayor masa, menor recorrido).

Para comprobarlo vamos a utilizar las ecuaciones del movimiento. Como se trata de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado utilizaremos estas ecuaciones:

$v = v_o - a\,t$ $\qquad$ $e = v_o\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2$

Ya que establecemos el criterio de signos de los vectores hacia arriba del plano positivos y los que se dirigen hacia abajo del plano negativos. Como el máximo recorrido del plano se produce cuando "v" se hace cero podemos obtener el espacio recorrido hasta entonces de la siguiente forma:

$0 = v_o - a\,t_1$ $\qquad$ $t_1 = v_o/a$ $\qquad$ $e_{max} = \dfrac{v_o v_o}{a} - \dfrac{a.v_o^2}{2.a^2} = \dfrac{v_o^2}{2a}$

y como la aceleración es $a = g\ sen\ \alpha$ nos queda que el máximo espacio recorrido sobre el plano será:

$$e_{max} = \frac{v_o^2}{2gsen\alpha}$$

Como vemos, depende de v_o y del ángulo del plano inclinado. NO depende de la masa "m" lanzada.

Para calcular la altura máxima alcanzada, por razonamientos geométricos sería:

$h_{max} = e_{max}.sen\alpha = \dfrac{v_o^2}{2g}$ que como vemos, sólo depende de v_o (y, naturalmente, en la Tierra del valor de g).

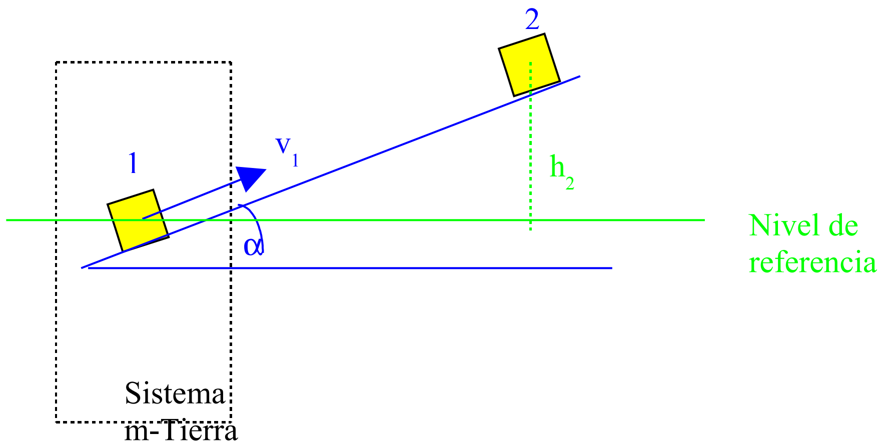
También podríamos haber razonado energéticamente. Como el sistema masa- plano(Tierra) es aislado y conservativo (pues nos dicen que no hay fuerzas de rozamiento) la energía total debe permanecer constante. Considerando los puntos 1 y 2 como el lugar del lanzamiento y el punto en el que instantáneamente la velocidad se hace cero respectivamente, tendremos:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

Considerando la base del plano (el lugar del lanzamiento) como el origen de energías potenciales, y que en el punto 2 la energía cinética es cero :

$$E_{c1} + 0 = 0 + E_{p2} \qquad\qquad \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh_2$$

de donde $\quad h_{max} = h_2 = \dfrac{v_o^2}{2g}$



c) Si la velocidad de lanzamiento es 20 m/s y el ángulo del plano 20º, las ecuaciones de movimiento de la masa que nos darán la velocidad instantánea y la posición instantánea serán (teniendo en cuenta que a=g sen α = 9´8 sen 20º = 3´35 m/s^2) :

v= 20 - 3´35 t $\qquad$ e = 20 t – ½ 3´35 t^2

luego cuando t = 4s la velocidad y la posición serán:

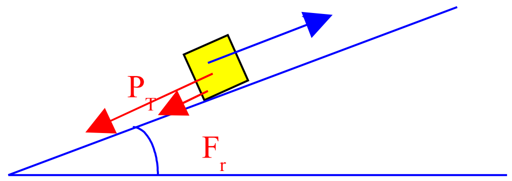
v = 6´6 m/s (subiendo) $\qquad$ e = 53´2 m

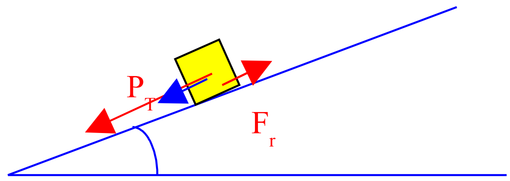
y cuando t = 9 s

v = - 10´2 (bajando) $\qquad$ e = 44´3 m

2.- a) Si existe rozamiento entre la masa y el plano inclinado, además de las fuerzas antes consideradas (P y N cuya resultante era P_T) tendremos que considerar la fuerza de rozamiento que siempre se opone al movimiento y que será por tanto en sentido contrario al mismo.

subiendo $\qquad\qquad\qquad\qquad$ bajando





Recordemos que, la fuerza de rozamiento viene dada por $F_r \leq \mu$ N y, en nuestro caso N = mg cos α con lo que $F_r \leq \mu$ mg cos α . Con el igual consideramos el caso en el que la masa está en movimiento.

Subiendo, la fuerza resultante será $F = P_T + F_r$ (teniendo en cuenta el criterio de signos) :

F = - mg sen α - μ mg cos α

Bajando, la fuerza resultante será

F = - mg sen α + μ mg cos α

b) Como hemos visto con la fuerza resultante que no resulta ser la misma subiendo que bajando, la aceleración tampoco será la misma.

Subiendo será a = - g (sen α + μ cos α)

Bajando será a = - g (sen α - μ cos α)
Como consecuencia de lo anterior, la masa no tardará el mismo tiempo en subir por el plano que en bajar por el mismo (si realmente baja). El tiempo de bajada será mayor que el de subida ya que la aceleración es menor.

d) Si el rozamiento es suficientemente grande y el ángulo del plano no muy grande, la masa puede alcanzar una determinada altura hasta pararse y, no volver a bajar, quedándose en reposo en ese punto.

Esto ocurrirá siempre que la aceleración en la bajada sea cero o mayor que cero (lo que significaría que “sube” por el plano acelerando, situación absurda).

Según esto la aceleración para que vuelva a bajar debe ser $a < 0$. Consideremos el caso para el cual quedará en reposo en el punto más alto que será cuando $a \geq 0$.

$-g\,(\text{sen}\ \alpha - \mu \cos \alpha) \geq 0$ $\mu \cos \alpha \geq \text{sen}\ \alpha$ luego cuando

$\mu \geq \text{tg}\ \alpha$

Todo esto podremos comprobarlo en el applet.

e) En el caso planteado en el que el ángulo del plano es 20º y el coeficiente de rozamiento 0´2, se cumple la condición de que tg 20º = 0´36 es mayor que μ , luego la masa subirá por el plano y volverá a bajar.

En la subida, la aceleración será :

$a = -\ 9´8\ (\text{sen}\ 20º + 0´2 \cos 20º) = -\ 5´2\ m/s^2$

y en la bajada será de

$a = -\ 9´8\ (\text{sen}\ 20º - 0´2 \cos 20º) = -\ 1´5\ m/s^2$

Las ecuaciones del movimiento de subida serán

$v = 20 - 5´2\ t$ $e = 20\ t - ½\ 5´2\ t^2$ con lo que el tiempo que tarda en pararse y el espacio recorrido por el plano serán

$t = 20/5´2 = 3´85\ s$ $e_{max} = 20.\ 3´85 - (1/2)\ 5´5\ .\ 3´85^2 = 38´5\ m$

La altura máxima alcanzada será sen 20º = $h_{max}/38´5$ de donde

$h_{max} = 38´5\ \text{sen}\ 20º = 13´2\ m$

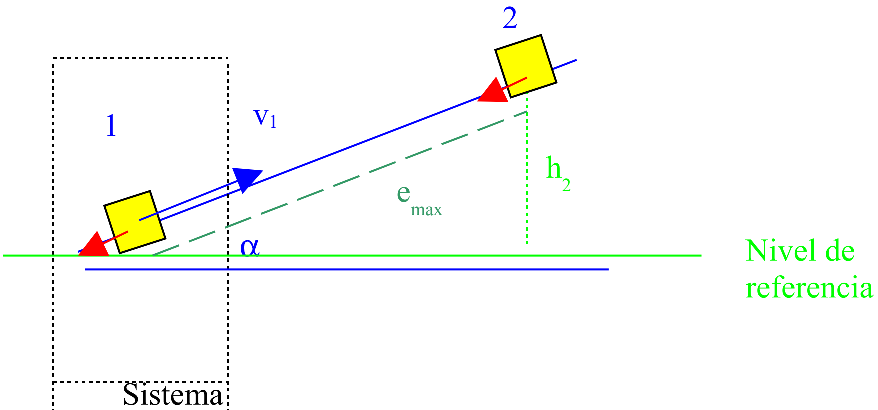
Las ecuaciones correspondientes al movimiento de bajada por el plano serán (cambiando el origen de tiempos):

$v = -\ 1´5\ t$ $e = 38´5 - (1/2)\ 1´5\ .\ t^2$

con lo que, el tiempo que tardará en llegar a la base del plano será cuando e=0 , por tanto

$38´5 = (1/2)\ 1´5\ .\ t^2$ de donde $t = 7´2\ s$ y , la velocidad con la que llega a la base del plano será de $v = -\ 10´7\ m/s$.

También podríamos haber razonado energéticamente considerando el sistema masa+ plano+Tierra en el estará actuando una fuerza NO CONSERVATIVA como la de rozamiento, cuyo trabajo (siempre negativo) disminuye la energía mecánica del sistema.



Aplicando el principio de conservación de la energía:

$\Delta E_p + \Delta E_c = W_{Fr}$ $\qquad$ $(E_{p2} - 0) + (0 - E_{c1}) = W_{Fr}$

$E_{p2} - E_{c1} = |F_r| \, . \, e_{max} . \cos 180^o$ $\qquad$ $m\, g\, h_2 = \frac{1}{2} m\, v_1^2 - |F_r| . e_{max}$

$m\, g\, e_{max} \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2} m\, v_1^2 - \mu\, m\, g \cos \alpha \, . \, e_{max}$

$9'8 \, . \, e_{max} \text{ sen } 20^o = 0'5 \, . \, 20^2 - 0'2 \, . \, 9'8 \cos 20^o \, . \, e_{max}$

$e_{max} . 9'8 \, (\text{sen } 20^o + 0'2 \, . \cos 20^o) = 200$

$e_{max} = 38.5 \text{ m}$

como vemos se obtiene el mismo resultado con los dos razonamientos, el cinemático y el energético.

$h_2 = h_{max} = e_{max} \text{ sen } 20^o = 13'2 \text{ m}$

Comprueba los resultados en el applet.