EXERCICIS AMB EL LLIBRE VIRTUAL

Data:

Alumnes: ____

5.1 Descomposició factorial: **Treure el factor comú en una potència de *x***

a) En la part esquerra de l'escena se'ns explica què s'entén per descomposició factorial d'un polinomi. Observeu que, segons ens explica, **2** i **$x - 5$ no són divisors propis** del polinomi **$2x - 10$**, tot i que $2x - 10 = 2\cdot(x - 5)$. **Són divisors impropis**.

Anoteu a continuació la propietat que apareix destacada en la part esquerra de l'escena:

Per què els polinomis de segon grau són primers si $b^2 - 4ac < 0$? Expliqueu-ho:

b) Observeu atentament l'animació que apareix a la part dreta. Una vegada entès el que explica, premeu sobre la icona del llapis per fer uns exercicis. Completeu la taula següent amb 5 dels exemples fets:

Polinomi	Mínima potència de x	Igualtat
$-4x^8 - 7x^5 + 6x^3 + 5x^2$	x^2	$-4x^8 - 7x^5 + 6x^3 + 5x^2 = x^2\,(-4x^6 - 7x^3 + 6x + 5)$

c) Punxeu sobre l'enllaç "Alguns exemples de descomposició factorial" que apareix en la zona esquerra de l'escena. Copieu els sis exemples a la taula següent:

Polinomi	Descomposició factorial
$x^5-5x^4+6x^3$	
x^2-6x+9	
x^3-1	
$2x^2+3x+1$	
x^4+5x^2-2x+8	
$x^4-5x^3+6x^2+4x-8$	

Després, tal com proposa l'activitat, feu els productes indicats en la descomposició factorial, per comprovar que, efectivament, ambdues formes són equivalents:

5.2 Descomposició factorial: **Arrels d'un polinomi**

a_1) En la part esquerra de l'escena se'ns explica en primer lloc què s'entén per arrel d'un polinomi P(x) (un nombre **a** tal que **x – a** és divisor de P(x)) i s'afirma que, segons el teorema del residu, equival a dir que **P(a) = 0**. Comprova-ho en els següents exemples, que s'han pres de l'activitat anterior. Substituïu en el membre de la igualtat que us semble més còmode per al càlcul:

Polinomi	Calcula
$P_1(x) = x^5-5x^4+6x^3 = x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)$	$P_1(0) =$; $P_1(2) =$; $P_1(3) =$
$P_2(x) = x^2-6x+9 = (x-3)^2$	$P_2(3) =$
$P_3(x) = x^3-1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$	$P_3(1) =$
$P_4(x) = 2x^2+3x+1 = 2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)$	$P_4(-1) =$; $P_4(1/2) =$
$P_5(x) = x^4+5x^2-2x+8 = (x^2+x+4)\cdot(x^2-x+2)$	No s'anul·la per a cap nombre real
$P_6(x) = x^4-5x^3+6x^2+4x-8 = (x-1)\cdot(x-2)^3$	$P_6(1) =$; $P_6(2) =$

a_2) A continuació, l'escena ens explica que si un nombre **a**, enter, és arrel d'un polinomi amb coeficients també enters, segur que **a** és divisor del coeficient de menor grau del polinomi. I en fa la demostració. Llegiu-la atentament i feu les dues activitats que tot seguit us propose:

– L'escena empra l'expressió $P(x) = p_n\mathbf{x}^n + p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1} + ... + p_1\mathbf{x} + p_0$. Considerem un exemple concret:

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

El valor de **n** en aquest polinomi és 4. Segons això:

$p_4 =$; $p_3 =$; $p_3 =$; $p_1 =$ i $p_0 =$

Apliqueu el que planteja la demostració a aquest exemple, amb a = 2. Completeu la demostració:

$P(\mathbf{2}) = 0 \rightarrow \mathbf{2}^4 - 5\cdot\mathbf{2}^3 + 6\cdot\mathbf{2}^2 + 4\cdot\mathbf{2} - 8 = 0 \rightarrow$

– Escriviu un polinomi de grau 5 (per tant, n = 5 en la fórmula) emprant la forma general $P(x) = p_n\mathbf{x}^n + p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1} + ... + p_1\mathbf{x} + p_0$. Completeu:

$P(x) = p_5x^5 +$

Repetiu la demostració per a aquest polinomi general de grau 5, si se sap que P(a) = 0:

$P(\mathbf{a}) = 0 \rightarrow p_5\mathbf{a}^5 +\quad +\quad +\quad +\quad = 0 \rightarrow$

a_3) L'escena continua dient "La descomposició d'un polinomi de tercer grau amb arrels 4, 1 i −2 és $a\cdot(x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$." Contesta:

– Quin significat té la lletra **a** que apareix en la descomposició factorial?

– Per què podem saber que la descomposició factorial té eixa forma?

b) Obriu ara l'enllaç "Exemples" i llegiu atentament els dos primers. Feu després tres exercicis (almenys) dels que apareixen a la part dreta. Anoteu a la taula els resultats:

Polinomi	Arrels trobades	Descomposició factorial

Quan trobem la primera arrel, l'escena explica que pot ser més convenient continuar trobant les arrels restants resolent l'equació de segon grau corresponent. Practica aquest mètode amb els següents exemples:

Polinomi	Arrels trobades (regla de Ruffini)	Arrels trobades (equació de segon grau)	Descomposició factorial
$4x^3 - 3x + 1$			
$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$			
$9x^4 - 18x^3 + 5x^2 + 8x - 4$			

c) Torneu ara a obrir els exemples de la zona esquerra. Copiem ací part del tercer:

Trobeu la descomposició factorial de $\mathbf{12x^3 + 4x^2 - 17x + 6}$.

Les possibles arrels en Q de $\mathbf{12x^3 + 4x^2 - 17x + 6}$ són els quocients dels divisors de 6 entre els divisors de 12:

$$\frac{\text{divisors de } 6}{\text{divisors de } 12}; \qquad \frac{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm6}{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12}$$

$$\pm1 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{1}{4} \quad \pm\frac{1}{6} \quad \pm\frac{1}{12} \quad \pm2 \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm3 \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm\frac{3}{4} \quad \pm6$$

És fàcil veure amb la Regla de Ruffini que ni 1, ni −1 són arrels de P. Vegem per la Regla de Ruffini si 1/2 és arrel de P:

	12	4	-17	6	
1/2)		6	5	−6	
	12	10	−12	**0**	1/2 és arrel de P.

En resoldre l'equació $12x^2+10x-12=0$, s'obté que −3/2 i 2/3 són arrels de P.

$$\boxed{\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)}$$

Apliqueu aquest procediment al polinomi $75x^3 - 50x^2 - 12x + 8$:

Llegiu el quart exemple. El procediment que s'empra és:

Si es reconeix x^4-4 com una diferència de quadrats $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultarà fàcil la descomposició factorial: $x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$

El factor inicial és primer, però el segon torna a ser una diferència de quadrats $x^2-2=(x + 2) \cdot (x - 2)$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot\ (x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

Intenteu-ho amb els següents polinomis:

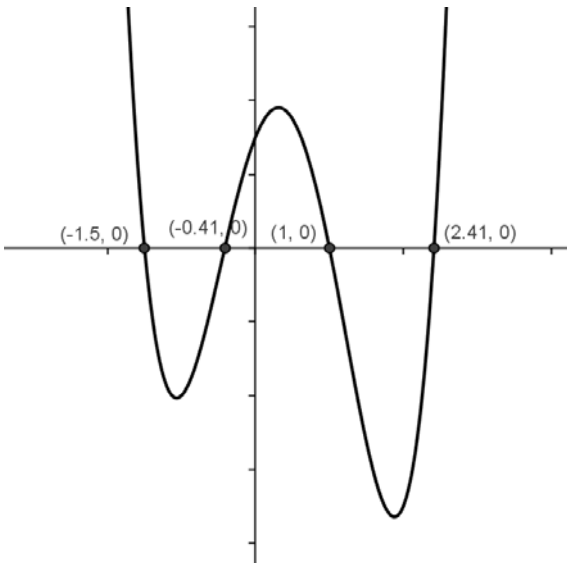
$2x^4 - 18 =$

$x^4 - 10x^2 + 25 =$

$x^5 - 49x =$

d) Amb l'ajuda d'un programa per representar funcions, se simplifica molt la tasca de cercar les arrels enteres o fraccionàries d'un polinomi. Observa el següent exemple:

En representar la funció $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3$, s'obté:



La gràfica ens indica que potser els nombres 1 i $-1{,}5$ són arrels del polinomi $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3$

Apliquem la regla de Ruffini per a a = 1, i obtenim(comproveu-ho):

$$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3 = (x - 1)\cdot(2x^3 - x^2 - 8x - 3)$$

Apliquem la regla de Ruffini al polinomi quocient $2x^3 - x^2 - 8x - 3$, per a $x = -1{,}5$ i obtenim:

$$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3 = (x - 1)\cdot(2x^3 - x^2 - 8x - 3) = (x - 1)\cdot(x + 1{,}5)\cdot(2x^2 - 4x - 2)$$

Resolem l'equació $2x^2 - 4x - 2 = 0$. Feu-ho a part i comproveu que les solucions són:

$$1 + \sqrt{2} \text{ i } 1 - \sqrt{2}$$

Tenim: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3 = 2\cdot(x - 1)\cdot(x + 1{,}5)\cdot(x - \left(1 - \sqrt{2}\right))\cdot(x - \left(1 + \sqrt{2}\right))$

Practiqueu aquest mètode usant la pàgina web arrels.html que obrireu a

http://iesjoanfuster-matematiques.edumoot.com/file.php/1/GeoGebra/arrels/arrels.html

Trobeu la descomposició factorial dels polinomis següents:

Polinomi	Descomposició factorial
$x^3 + x^2 - 6x$	
$2x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 44x - 20$	
$x^4 - 11x^2 + 18$	
$x^4 - x^3 - x + 1$	
$2x^4 - 13x^3 + 9x^2 + 81x - 135$	
$8x^5 - 20x^4 + 4x^3 + 12x^2$	

Proveu també a introduir altres funcions polinòmiques d'acord amb el que s'explica en el cas 7 de la pròpia pàgina web.

5.3 Descomposició factorial: **Fraccions algebraiques**

a) Llegiu la informació que apareix en la zona dreta de l'escena. Seguiu les indicacions del primer paràgraf. Intenteu comprendre bé els exemples de simplificació de fraccions que es presenten. Anoteu cinc exemples a la taula:

b) A continuació punxeu sobre el botó amb la icona del llapis per obrir una finestra emergent amb exercicis. Feu-ne uns quants i copieu-ne tres de suma i resta, tres de multiplicació i tres de divisió: