1 SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 29

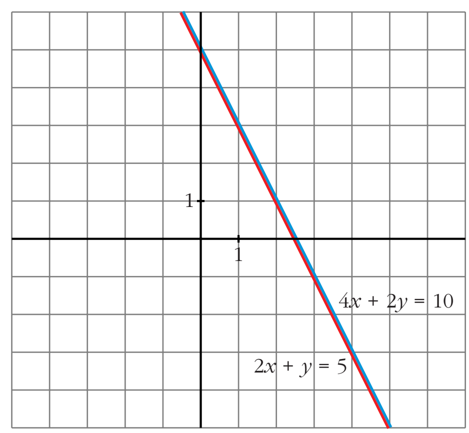
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

1. ¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos "datos distintos"? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

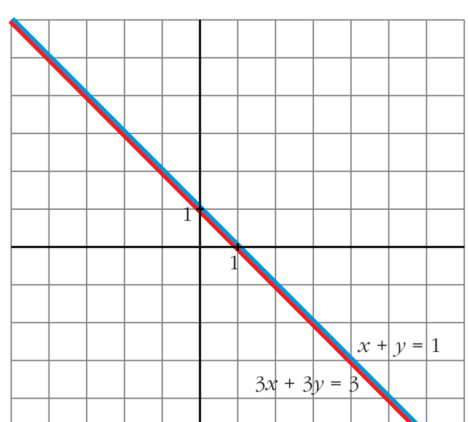
  Se trata de la misma recta.



- **Pon otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

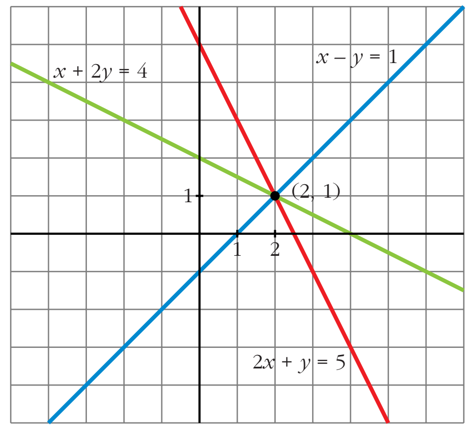
  Gráficamente son la misma recta.



2. Observa las ecuaciones siguientes:

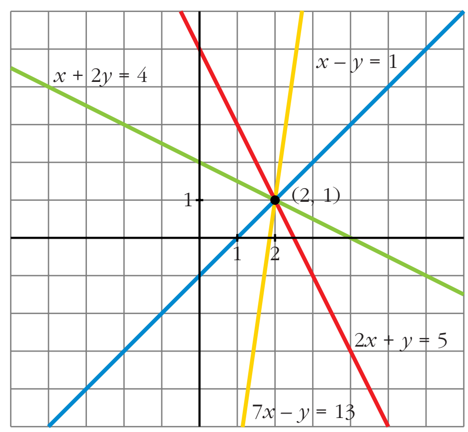
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Represéntalas y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2$, $y = 1$) y que la tercera recta también pasa por ese punto.**



- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras (por ejemplo: 2 · 1ª + 3 · 2ª), represéntala y observa que también pasa por $x = 2$, $y = 1$.**

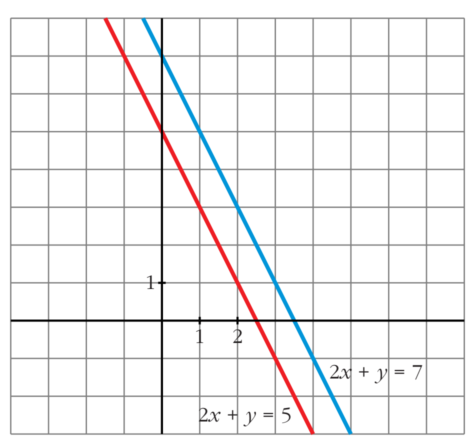
$2 \cdot 1^{a} + 3 \cdot 2^{a} \;\rightarrow\; 7x - y = 13$



3. Observa que *lo que dice la segunda ecuación es contradictorio con lo que dice la primera:*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

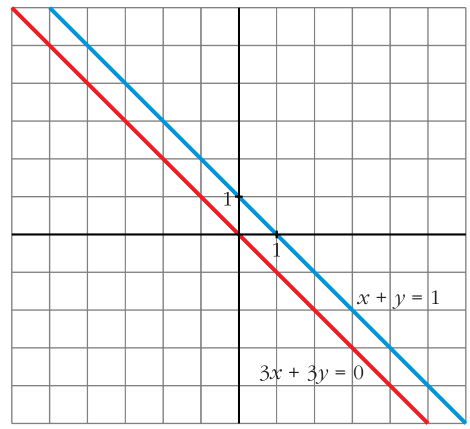
- **Represéntalas y observa que se trata de dos rectas paralelas, es decir, no tienen solución común, pues las rectas no se cortan en ningún punto.**



■ **Modifica el término independiente de la segunda ecuación del sistema que inventaste en el ejercicio 1 y representa de nuevo las dos rectas.**

Observa que lo que dicen ambas ecuaciones es ahora contradictorio y que se representan mediante rectas paralelas.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\}$$ Rectas paralelas:



Página 31

1. Sin resolverlos, ¿son equivalentes estos sistemas?

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{array}\right.$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 33

1. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + \ \ y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \to \ \ y = 1 - 2x \\ \\ \to \ \ y = 3 - \ x \end{array}\right\} \quad 1 - 2x = 3 - x \ \to \ x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$

Veamos si cumple la 2ª ecuación: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$

Solución: $x = -2, \ y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y \qquad = 7 \end{array}\right\}$ La 3ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solución: $x = 5 - 2\lambda, \ y = 1 + \lambda, \ z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \end{array}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es incompatible. Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 3, \ y = 2, \ z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2. a) Resuelve el sistema: $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 2y = 3} \\ \boldsymbol{x - \ \ y = 4} \end{array}\right.$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + \ y \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \ \to \ -1 = 3y \ \to \ y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}, \ y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) $\to$ Son dos rectas que se cortan en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\to$ La nueva recta también pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\to$ La nueva recta no pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 34

1. Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\}$ *Solución:* $x = \dfrac{7}{3}, \; y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solución: $x = 3, \; y = -29, \; z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + \lambda, \; y = -29 - 19\lambda, \; z = 11 + 6\lambda, \; t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solución: $x = 1, \; y = \dfrac{16}{9}, \; z = \dfrac{-2}{3}$

2. ¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:

a) $\begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solución: $x = 2, \; y = 5, \; z = 1, \; t = 2$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \; y = 5 - 3\lambda, \; z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \; y = \lambda, \; z = 1 - 2\lambda - \mu, \; t = \mu$

d) $\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \; y = \dfrac{1}{2}, \; z = 0$

Página 35

3. Transforma en escalonados y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \; y = 2, \; z = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \end{array}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$

(Podemos prescindir de la 3ª, pues es igual que la 2ª).

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$$

Soluciones: $x = 1, \ \ y = 5 - \lambda, \ \ z = \lambda$

4. Transforma en escalonado y resuelve:

$$\left\{\begin{array}{rcr} \mathbf{x - \ \ y + 3z \qquad \ \ } &=& \mathbf{0} \\ \mathbf{3x - 2y - 5z + 7w} &=& \mathbf{-32} \\ \mathbf{x + 2y - \ \ z + 3w} &=& \mathbf{18} \\ \mathbf{x - 3y + \ \ z + 2w} &=& \mathbf{-26} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x - \ \ y + 3z \qquad \ \ &=& 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w &=& -32 \\ x + 2y - \ \ z + 3w &=& 18 \\ x - 3y + \ \ z + 2w &=& -26 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}} \left.\begin{array}{rcr} x - \ \ y + \ \ 3z \qquad \ \ &=& 0 \\ y - 14z + 7w &=& -32 \\ 3y - \ \ 4z + 3w &=& 18 \\ -2y - \ \ 2z + 2w &=& -26 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a + 2 \cdot 2^a \end{array}} \left.\begin{array}{rcr} x - y + \ \ 3z \qquad \ \ &=& 0 \\ y - 14z + \ \ 7w &=& -32 \\ 38z - 18w &=& 114 \\ -30z + 16w &=& -90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 2 \\ 15 \cdot 3^a + 19 \cdot 4^a \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x - y + \ \ 3z \qquad \ \ &=& 0 \\ y - 14z + \ \ 7w &=& -32 \\ 19z - \ \ 9w &=& 57 \\ 34w &=& 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1, \ \ y = 10, \ \ z = 3, \ \ w = 0$

Página 38

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{rcr} \mathbf{x + \ \ y + \ \ z} &=& \mathbf{2} \\ \mathbf{3x - 2y - \ \ z} &=& \mathbf{4} \\ \mathbf{-2x + \ \ y + 2z} &=& \mathbf{2} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcr} \mathbf{3x - 4y + 2z} &=& \mathbf{1} \\ \mathbf{-2x - 3y + \ \ z} &=& \mathbf{2} \\ \mathbf{5x - \ \ y + \ \ z} &=& \mathbf{5} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{rcr} \mathbf{x - 2y \qquad} &=& \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2x + 3y + \ \ z} &=& \mathbf{4} \\ \mathbf{2x + \ \ y - 5z} &=& \mathbf{4} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{rcr} x + \ \ y + \ \ z &=& 2 \\ 3x - 2y - \ \ z &=& 4 \\ -2x + \ \ y + 2z &=& 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot (-1) \\ 3^a \cdot 5 + 2^a \cdot 3 \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{rcr} x + \ \ y + \ \ z &=& 2 \\ 5y + 4z &=& 2 \\ 2z &=& 24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \ \ y = -2, \ \ z = 3$

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + \ \ z = 2 \\ 5x - \ \ y + \ \ z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} - 2 \cdot 3^{a} \\ 2^{a} - 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

$$\text{c)}\quad \left.\begin{array}{r} x - 2y \qquad = -3 \\ -2x + 3y + \ \ z = \ \ 4 \\ 2x + \ \ y - 5z = \ \ 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 5 \cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x - 2y \qquad = -3 \\ -y + z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + \ \ y \end{array}$$

Soluciones: $x = -3 + 2\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -2 + \lambda$

2. Resuelve mediante el método de Gauss:

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x - \ \ y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{-x + 3y + \ \ z = 3} \\ \boldsymbol{x + \ \ y + 5z = 7} \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{2x - \ \ y \qquad + \ \ w = 0} \\ \boldsymbol{x - 2y + z \qquad \ \ = 0} \\ \boldsymbol{5x - \ \ y + z + \ \ w = 0} \\ \boldsymbol{5x - 2y - z + 2w = 0} \end{array}\right. \qquad \textbf{c)} \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{2x - \ \ y \qquad + \ \ w = \ \ 9} \\ \boldsymbol{x - 2y + z \qquad \ \ = 11} \\ \boldsymbol{5x - \ \ y + z + \ \ w = 24} \\ \boldsymbol{5x - 2y - z + 2w = \ \ 0} \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\quad \left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 2z = 2 \\ -x + 3y + \ \ z = 3 \\ x + \ \ y + 5z = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5 - 3z}{2} = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3z}{2} \end{array}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \quad y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y \qquad + \ \ w = 0 \\ x - 2y + z \qquad \ \ = 0 \\ 5x - \ \ y + z + \ \ w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 4^{a} \\ 4^{a} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 0, \ \ w = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{array}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 4^a \\ 4^a \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solución: $x = \frac{-3}{4}, \ \ y = \frac{11}{4}, \ \ z = \frac{69}{4}, \ \ w = \frac{53}{4}$

Página 39

1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{4x + 2y = k} \\ \boldsymbol{x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{kx + y + z = 1} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{4x + 2y = k} \\ \boldsymbol{x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{kx + y + z = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k + 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k - 3 & 0 & 0 & 3 - k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - z = 2 - y \\ 4x \quad = 3 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \frac{3}{4} - \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- *Si* $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = k \\ (k - 3)x \quad = (3 - k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{3 - k}{k - 3} = -1$$

$$y = \frac{k - 4x}{2} = \frac{k + 4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solución: $x = -1$, $y = 2 + \frac{k}{2}$, $z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \quad = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema es *incompatible*.

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = k \\ (k - 3)x \quad = (2 - k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solución: $x = \dfrac{2-k}{k-3}, \quad y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}, \quad z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}} \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$

- *Si* $k = -3$, queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2-k-16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2-k+8}{(k+3)}$$

Solución: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}, \quad y = \dfrac{-k^2-k+8}{(k+3)}, \quad z = \dfrac{k^2-k-16}{k+3}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \to$

$\to$ $\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2^{a} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$

- *Si* $k = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*.

- Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k-2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \quad \to \quad y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} =$$

$$= \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

Solución: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}$, $y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}$, $z = \dfrac{2-k}{1+k}$

Página 44

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos gráficamente:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right.$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \\ 4^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \quad \to \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \to \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$

De la 2ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{5}$; de la 3ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{3}$.

Luego, el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

2 Comprueba que este sistema es incompatible y razona cuál es la posición relativa de las tres rectas que representa:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividimos la 3ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1ª y la 3ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2ª las corta.

3 Resuelve e interpreta geométricamente el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ (2/3) \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right\}$$

Solución: $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7+y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}\right\}$

Solución: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\}$ $z = \dfrac{2}{9}$ $y = z - 1 = \dfrac{-7}{9}$ $x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda,\ 4 - \lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}$ $z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

5 **S** **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a - 5 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array}$

Solución: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 5 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \qquad x = -y - z = \frac{3}{2}$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

6 **Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -17 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{array}\right\}$

$x = \frac{4}{11} \qquad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$

Solución: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\substack{2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 5 \cdot 2^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{array}\right\} \quad z = \dfrac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

7 S **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} - 3 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 5 \cdot 1^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 2^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{array}\right\}$

$y = 4z + 2$
$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$
$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda,\ 2 + 4\lambda,\ \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\substack{3^{a} \\ 2^{a} : 2 \\ 1^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} - 3 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\substack{1^{a} \\ 2^{a} : (-5) \\ 3^{a} : 7}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - \ \ z = \ \ 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solución: (–1, 1, –2)

8 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y - \ \ z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - \ \ z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2ª ecuación entre 2, obtenemos :

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradice la 1ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\dfrac{2}{3}$ la 1ª ecuación, obtenemos:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

9 **S** **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = \ \ 9 \\ x - \ \ y - z = -10 \\ 2x - \ \ y + z = \ \ 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = \ \ 3 \\ 2x - \ \ y + z = -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} -x + 2y - \ \ z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + \ \ y + \ \ z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ \ y \ \ \ \ \ \ = 0 \\ 4x + \ \ y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = \ \ 9 \\ x - \ \ y - z = -10 \\ 2x - \ \ y + z = \ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ -2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 2^{a} + 2 \cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \ \ z = \ \ 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y \ \ \ \ \ \ \ \ = -7 \end{array}\right\}$

$y = 1$ $z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8$ $x = 9 - 2y - z = -1$

Solución: (–1, 1, 8)

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ -2^{a} + 2 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$$

Si hacemos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 2 \cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$y = 3x$
$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$
$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 S **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + \ \ y + 3z = 0} \\ \mathbf{4x + 2y - \ \ z = 0} \\ \mathbf{6x + 3y + 2z = 0} \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - 3y - \ \ z = -1} \\ \mathbf{x + 5y + 3z = \ \ 3} \\ \mathbf{x + \ \ y + \ \ z = \ \ 1} \\ \mathbf{3x + 7y + 5z = \ \ 5} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x \quad\ \ + 2z = 11 \\ x + y \qquad = \ \ 3 \\ \quad\ \ y + \ \ z = 13 \\ x + y + \ \ z = 10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 4^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x \qquad + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = \ \ 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = \ \ 1 \\ x - y + z - t = \ \ 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = \ \ 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left.\begin{array}{r} x + y + z + \ \ t = \ \ 1 \\ -2y \qquad - 2t = -1 \\ z + \ \ t = \ \ 1 \\ -2t = \ \ 1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad y = \dfrac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$

Solución: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - \ \ z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -2x \\ x = \lambda \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $(\lambda, -2\lambda, 0)$

d) $$\left.\begin{array}{r} x - 3y - \ \ z = -1 \\ x + 5y + 3z = \ \ 3 \\ x + \ \ y + \ \ z = \ \ 1 \\ 3x + 7y + 5z = \ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = 1 - y - 1 + 2y = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 1 - 2\lambda)$

11 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \textit{Compatible indeterminado.}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$$

$\to$ *Compatible determinado.*

PARA RESOLVER

12 **Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:**
S

a) $\left\{\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + \ \ y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}+6\cdot 2^{a}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 23 & 69\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r}x+y+\ \ z=\ 2\\ y+3z=\ 7\\ 23z=69\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}z=3\\ y=7-3z=-2\\ x=2-y-z=1\end{array}\right\}$$

El sistema es *compatible determinado*, con solución $(1, -2, 3)$.

b) $$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\ x+2y-z=0\\ 4x+\ \ y-z=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}+1^{a}\\ 3^{a}+1^{a}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 6 & -2 & 0 & 0\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-2\cdot 2^{a}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible indeterminado*.

Lo resolvemos: $$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\ 3x-\ \ y\ \ \ \ \ \ \ =0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}y=3x\\ z=-2x+3y=-2x+9x=7x\\ x=\lambda\end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Página 45

13 S **Estudia y resuelve estos sistemas por el método de Gauss:**

a) $$\left\{\begin{array}{r}-x+\ \ y+3z=-2\\ 4x+2y-\ \ z=\ \ 5\\ 2x+4y-7z=\ \ 1\end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r}y+\ \ z=-1\\ x-\ \ y\ \ \ \ \ \ \ \ =\ \ 1\\ x+2y+3z=-2\end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{r}5x+2y+3z=\ \ 4\\ 2x+2y+\ \ z=\ \ 3\\ x-2y+2z=-3\end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{r}x-\ y+3z-14t=0\\ 2x-2y+3z+\ \ t=0\\ 3x-3y+5z+\ 6t=0\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r}-x+\ \ y+3z=-2\\ 4x+2y-\ \ z=\ \ 5\\ 2x+4y-7z=\ \ 1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}+4\cdot 1^{a}\\ 3^{a}+2\cdot 1^{a}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 6 & -1 & -3\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-2^{a}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 0 & -12 & 0\end{array}\right) \to$$ Sistema *compatible determinado*.

Lo resolvemos: $$\left.\begin{array}{r}-x+y+\ \ 3z=-2\\ 6y+11z=-3\\ z=\ \ 0\end{array}\right\}\quad y=-\frac{1}{2}\qquad x=y+3z+2=\frac{3}{2}$$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 2.^a \\ 1.^a \\ 3.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ z = -1 - y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda,\ \lambda,\ -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3.^a \\ 2.^a \\ 1.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 5 \cdot 1.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 3 \\ 3.^a - 2 \cdot 2.^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solución: $(1,\ 1,\ -1)$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 1.^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ -4 \cdot 2.^a + 3 \cdot 3.^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0)$

14 S **Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 7 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $a = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*
- Si $a \neq 10 \to$ Sistema *compatible determinado*

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Compatible determinado para todo m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 5 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2 - 2a = 0 \to a = 1$

- Si $a = 1 \to$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1 \to$ Sistema *compatible determinado*

15 S **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2 \cdot 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$2x - y = 4 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{array}\right.$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$

Solución: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$

Haciendo $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ *Incompatible*

16 S **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \ \lambda, \ 1 - 2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

17 S **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-5) \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \ x = 3 - 2y = 1$$

Solución: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible*

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m - 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m + 1 \end{array}\right)$$

• Si $m = -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} x - \;\; y - 2z = \;\;\; 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3-7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

• Si $m \neq -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

18 **S** **Discute y resuelve en función del parámetro:**

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + my + \;\; z = \;\;\; 2 \\ 2x - \;\;\; y + 2z = \;\;\; 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + \;\; y + \;\;\; z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \;\; y + \;\;\; z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + my + \;\; z = \;\;\; 2 \\ 2x - \;\;\; y + 2z = \;\;\; 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

• Si $m = 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado*

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

• Si $m \neq 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad\qquad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y \qquad\quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1, 0, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + \;\; y + \;\;\; z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \;\; y + \;\;\; z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

• Si $a = 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

- Si $a \neq 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= -3 \\ (a-2)z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solución: $\left(\dfrac{3a-6}{a-2}, \dfrac{4-3a}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

19 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x - y \phantom{{}-5z} &= 1 \\ 2x + 3y - 5z &= -16 \\ x + \alpha y - z &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\substack{1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \cdot \alpha - 1^{\underline{a}}}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $\left.\begin{aligned} x - y \phantom{{}-5z} &= 1 \\ 2x + 3y - 5z &= -16 \\ x + \alpha y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\substack{1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 5 \cdot 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $\alpha = 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

20 **S** **Se considera el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 2y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{x + ay + 3z = 2} \\ \boldsymbol{2x + (2 + a)y + 6z = 3} \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \\ z = \lambda \end{array} \to x = 2 - 3z$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

21 **S** **Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x - 2y - z = 4} \\ \boldsymbol{x + 2y - 2z = -1} \\ \boldsymbol{x - z = 1} \end{array}\right.$$

a) ¿Existe una solución en la que y sea igual a 0?

b) Resuelve el sistema.

c) Interprétalo geométricamente.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\Bigg\}$$

a) $y = 0 \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array}\right\}$

Solución: (3, 0, 2)

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Soluciones: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Son tres planos que se cortan en una recta.

22 **Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que, si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.**

Llamamos x a la cifra de las unidades, y a la de las decenas y z a la cifra de las centenas.

$$z \; y \; x \quad \to \quad \text{n}^{\text{o}} = x + 10y + 100z$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 10y + 100z - (z + 10y + 100x) = 198 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ -99x + 99z = 198 \\ 2y = x + z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ -x \quad\;\; + z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 11 \\ 0 & -2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} : 2 \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 11 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 11 \\ 0 & 0 & 3 & | & 12 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x \quad + z = 2 \\ y + 2z = 11 \\ 3z = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 4 \\ y = 11 - 2z = 11 - 8 = 3 \\ x = z - 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: El nº es el 432.

23 **S** **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 € y el segundo de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = 1\,050 \\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = 950 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -3^a + 2^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ B + 2C = 25\,000 \\ 3C = 30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 10\,000 \\ B = 5\,000 \\ A = 5\,000 \end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

Página 46

24 S **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.**

Llamamos x al nº de copias vendidas al precio original, 12 €; y al nº de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al nº de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 12 \cdot 1^a \\ -3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a - 3{,}6 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1{,}2z = 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

25 **S** **Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.**

Llamamos x al nº de billetes de 10 €; y al nº de billetes de 20 €; y z al nº de billetes de 50 €. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \quad \to \quad 4y + 475 - 15y = 200 \quad \to \quad 275 = 11\,y$

$y = 25 \quad \to \quad z = 20 \quad \to \quad x = 50$

Solución: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

26 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al nº de monedas que hay en la caja A, y al nº de monedas que hay en la caja B, y z al nº de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \quad \to \quad x = 19$

De la 3ª ecuación $\quad \to \quad y = \dfrac{x+3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

27 **Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600 000 €. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?**

Llamamos x a lo que le costó el 1^er^ objeto (en millones de euros), y a lo que le costó el 2º objeto y z a lo que le costó el 3^er^ objeto. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 0{,}6 \\ 0{,}8x + 0{,}9y + 0{,}85z = 1{,}7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2{,}5z = 6 \\ 8x + 9y + 8{,}5z = 17 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 8{,}5 & 17 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 8 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 2 \\ 2y \qquad = 1 \\ y + 0{,}5z = 1 \end{array}\right\}$$

$$y = 0{,}5 \qquad z = \frac{1 - y}{0{,}5} = 1 \qquad x = 2 - y - z = 0{,}5$$

Solución: El 1er objeto le costó 0,5 millones de euros (500 000 €), el 2º le costó 0,5 millones de euros (500 000 €) y el 3º le costó 1 millón de euros (1 000 000 €).

28 **Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?**

Llamamos x al nº de empleados que siguen el curso A; y al nº de empleados que siguen el curso B, y z al nº de empleados que siguen el curso C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27\,200 \\ 400x = 5 \cdot 160y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ 400x = 800y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + z = 100 \\ 24y + 5z = 680 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) = 680 \end{array}$$

$$24y + 500 - 15y = 680 \to 9y = 180 \to y = 20 \to z = 40;\ x = 40$$

Solución: 40 empleados siguen el curso A, 20 empleados siguen el curso B y 40 siguen el curso C.

29 **Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?**

Llamamos x a la longitud de camino llano entre A y B, y a la longitud de cuesta arriba yendo de A a B y z a la longitud de cuesta abajo yendo de A a B. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 192 \text{ km} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{54} + \dfrac{z}{90} = 2{,}5 \text{ horas} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{90} + \dfrac{z}{54} = 2{,}75 \text{ horas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 192 \\ 27x + 40y + 24z = 5\,400 \\ 27x + 24y + 40z = 5\,940 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 27 & 40 & 24 & 5\,400 \\ 27 & 24 & 40 & 5\,940 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 27 \cdot 1^a \\ 3^a - 27 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & -3 & 13 & 756 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \cdot 3 + 2^a \cdot 13 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 192 \\ 0 & 13 & -3 & | & 216 \\ 0 & 160 & 0 & | & 5\,076 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 192 \\ 13y - 3z &= 216 \\ 160y &= 5\,076 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= 31{,}725 \text{ km} \\ z &= 65{,}475 \text{ km} \\ x &= 94{,}800 \text{ km} \end{aligned}$$

Solución: La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 Km.

30 S **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1ª PARTIDA	2ª PARTIDA	3ª PARTIDA
1º QUE PIERDE	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2º QUE PIERDE	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3º QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y - 4z &= 24 \\ -2x + 6y - 2z &= 24 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3y - z &= 12 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 6 \\ -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ -1 & -1 & 7 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{subarray}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 2 & -2 & | & 18 \\ 0 & -2 & 6 & | & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & | & 9 \\ 0 & -1 & 3 & | & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 2 & | & 24 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ y - z &= 9 \\ 2z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} z &= 12 \\ y &= 9 + z = 21 \\ x &= 6 + y + z = 39 \end{aligned}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2º lugar tenía 21 € y el que perdió en 3er lugar tenía 12 €.

31 S **La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?**

Hacemos una tabla:

	EDAD ACTUAL	HACE $y - z$ AÑOS	DENTRO DE $y + z$ AÑOS
PADRE	x	$x - y + z$	$x + y + z$
1er HIJO	y	$y - y + z = z$	$2y + x$
2º HIJO	z	$z - y + z = -y + 2z$	$y + 2z$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2(y + z) \\ x - y + z = 3(-y + 3z) \\ x + y + z + 2y + z + y + 2z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y + 2z \\ x - y + z = -3y + 9z \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 6 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z = 0 \\ -5z = -50 \\ y + z = 25 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 10 \\ y = 25 - z = 15 \\ x = 2y + 2z = 50 \end{array}\right\}$$ Actualmente tienen estas edades.

Solución: Cuando nació el 1^er^ hijo, el padre tenía 35 años; cuando nació el 2º hijo, tenía 40 años.

32 S **Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?**

Llamamos x a la cantidad que solicitó la 1ª tienda, y a la que solicitó la 2ª tienda y z a la que solicitó la 3ª tienda. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = 1{,}2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ 6y = 3{,}6x + 2{,}4z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 60y = 36x + 24z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 5y = 3x + 2z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & 42 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ y + z = 21 \\ 7z = 42 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 6 \\ y = 21 - z = 15 \\ x = y + z = 21 \end{array}$$

Solución: La 1ª tienda solicitó 21 electrodomésticos; la 2ª, 15; y la 3ª, 6.

CUESTIONES TEÓRICAS

33 **¿Para qué valores de a y b será compatible este sistema?**

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \end{cases}$$ **¿Será determinado?**

El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b. (Luego, no es determinado para ningún valor de a y b).

34 **Prueba que, si en un sistema de ecuaciones S sumamos a una ecuación otra multiplicada por un número, el sistema resultante, S', es equivalente al primero.**

Cualquier solución del primero también lo es del segundo, y al revés.

35 **Si tenemos un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?**

Sí. Por ejemplo:

Incompatible $\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\} \text{Compatible indeterminado} \\ \quad x + 2y = 1 \end{array} \right.$

36 **Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.**

No. Si el sistema es incompatible, las dos ecuaciones iniciales son contradictorias. Añadiendo otra ecuación, no podemos cambiar este hecho; el sistema seguirá siendo incompatible.

Página 47

37 S **¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Sí. Si cambiamos la 2ª ecuación por $x + y + z = 1$, o bien, si cambiamos la 3ª ecuación por $x + y + z = 1$, el sistema resultante será compatible indeterminado.

38 S **Dadas las ecuaciones:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea incompatible, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ con $k \neq 5a - 4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería incompatible.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y \qquad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x \quad + z = 5 \\ 2x \quad + z = -4 \\ y \qquad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \text{ Compatible determinado}$$

39 **S** **Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1er sistema lo son también del 2º, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1º es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2º es determinado (solo tiene una solución).

40 **S** **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \qquad + 3z = 2 \\ 2x \qquad + az = 3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \qquad + 3z = 2 \\ 2x \qquad + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} - 2 \cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es incompatible.

41 **S** **Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?**

No. Por ejemplo, los sistemas:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x - \ \ y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes, con solución única $(2, 1)$, tienen iguales los términos independientes, pero no los coeficientes de las incógnitas.

PARA PROFUNDIZAR

42 **S** **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:**

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$\to$ Sistema *compatible indeterminado*

Lo resolvemos en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + z = 1 \to x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado*

b) $\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underset{a \neq 0}{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ -a \cdot 3^{a} + 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2 - a \end{array}\right)$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \to a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} : 2 \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} -x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$$

Sistema *compatible indeterminado*

Soluciones: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado*

43 S **Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a. Interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{l} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a - 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a - 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible}$$

Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

44 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z + t = 17} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 16} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 15} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 14} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = 14} \end{array}\right.$$

☛ ***Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien:

$x + y + z + t + w = 19$

Por tanto:

$$\begin{array}{lll} (x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 & \rightarrow & w = 2 \\ (x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 & \rightarrow & t = 3 \\ (x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 & \rightarrow & z = 4 \\ (x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 & \rightarrow & y = 5 \\ (y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 & \rightarrow & x = 5 \end{array}$$

45 **Nos dicen que x, y, z, t, w son números enteros y que k vale 36 ó 38. Decide razonadamente cuál de los dos es su valor y resuelve el sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z + t = 35} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 36} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 38} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 39} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = k} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$x + y + z + t + w = 37 + \dfrac{k}{4}$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 ó 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto:

$(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \;\rightarrow\; w = 11$

$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \;\rightarrow\; t = 10$

$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \;\rightarrow\; z = 8$

$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \;\rightarrow\; y = 7$

$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \;\rightarrow\; x = 10$

46 **Una cuadrilla de 5 obreros se compromete a podar los 222 árboles de una plantación. Trabajan de lunes a sábado. Cada día, cuatro de ellos podan y el quinto los atiende (repone herramientas, les da agua, recoge los troncos que caen...). Cada obrero poda el mismo número de árboles cada día, es decir, si Alberto poda 8 árboles un día, podará 8 árboles cada día que intervenga. Los resultados son:**

Lunes: 35 árboles podados.

Martes: 36 árboles podados.

Miércoles: 36 árboles podados.

Jueves: 38 árboles podados.

Viernes: 38 árboles podados.

Sábado: 39 árboles podados.

Calcula cuántos árboles diarios poda cada uno de los cinco obreros sabiendo que ninguno de ellos poda los seis días.

Llamamos:

w = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el lunes.

t = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el martes.

(Es otro el que descansa, pues la suma es diferente).

z = nº de árboles diarios que poda el que descansa el jueves.

(Es otro distinto, pues la suma es diferente).

y = nº de árboles diarios que poda el que descansa el sábado.

(Es otro, pues la suma es distinta a las anteriores).

x = nº de árboles diarios que poda el obrero que falta.

(Descansará el miércoles o el viernes; coincidirá con t o con z).

Así, el nº de árboles que se podan cada día será:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \\ k \text{ puede ser } 36 \text{ ó } 38 \end{array}\right\} \quad x,\ y,\ z,\ t,\ w \text{ son enteros}$$

Se trata de resolver este sistema.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $k = 36$; y que:

$$x = 10,\ \ y = 7,\ \ z = 8,\ \ t = 10,\ \ w = 11$$

Por tanto, el que poda 11 árboles descansa el lunes, uno de los que podan 10 árboles descansa el martes, el que poda 8 árboles descansa el jueves y el viernes, el que poda 7 árboles descansa el sábado y el otro que poda 10 árboles, descansa el miércoles.

2 ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 48

■ **Ayudándote de la tabla...**

De la tabla podemos deducir muchas cosas:

— Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.

— B solo tiene un candidato (el C).

— Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).

— El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.

— Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.

— Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.

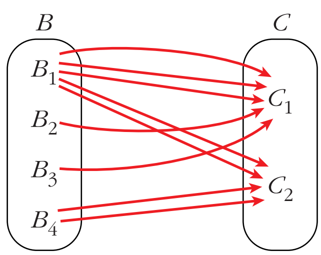
— Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.

— ...

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos eso piensan sus compañeros del consejo).

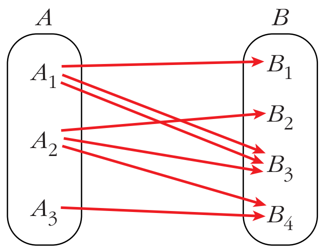
Página 49

■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

■ **Una persona quiere salir el lunes de A, pasar la noche en B y llegar el martes a C.**



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1.

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 51

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

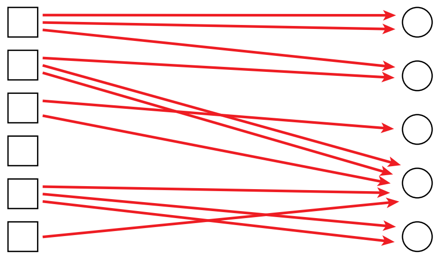
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. **Escribe una matriz que describa lo siguiente:**



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 52

1. **Sean las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-10} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$**.**

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 55

2. **Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz $A(3 \times 3)$, la deje igual.

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 56

1. Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 anteriores, referentes al producto de números por matrices, tomando: $a = 3$, $b = 6$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ 3(A + B) = 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

$$4)\ 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Página 57

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Página 60

1. Calcula x, y, z, t para que se cumpla: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

c) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. **Sean** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentra $\boldsymbol{X}$ **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

4. **Encuentra dos matrices,** $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$**, de dimensión** 2×2 **que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. **Encuentra dos matrices** $\boldsymbol{X}$ **e** $\boldsymbol{Y}$ **que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex] X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex] -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

6. **Averigua cómo ha de ser una matriz** $\boldsymbol{X}$ **que cumpla:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = t \\ \\ z = 0 \end{array} \end{array}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

7. **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

a) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})$

b) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$

c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

8. **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **comprueba que** $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2 = \mathbf{0}$**.**

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. **Halla la inversa de las matrices:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

Página 61

1. Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$. Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

- *Asociativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nulo*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector opuesto*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Asociativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producto por 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 63

Comprueba si los siguientes conjuntos de *n*-uplas son L.I. o L.D.

2. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad + 4w = 0 \\ -y \qquad - 2w = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z - 5w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

3. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad = 0 \\ -y \qquad = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z + w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

4. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \qquad = 0 \\ -4x \qquad + z = 0 \\ 7x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

- Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 65

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{-8} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (C) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (D) = 2$$

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \;\; 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \;\; 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \;\; 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \;\; 3) - (2 \;\; 3) = (0 \;\; 0)$

4 **Dadas las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

a) $(A + B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Bigg\} \ (3A)^t = 3A^t$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\Bigg\} \ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 **¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?**

La matriz unidad, I.

10 **Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 **Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1}, comprueba que:**

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Rango de una matriz

12 **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 7 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & -6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 6 \cdot 2^a + 7 \cdot 3^a \\ 10 \cdot 2^a + 7 \cdot 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (M) = 2$

Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (M) = 2$$

El conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es linealmente dependiente. Hay dos vectores linealmente independientes.

13 **S** **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 2 \cdot 2^{a} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \\ 4^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 2^{a} \\ 4^{a} - 2^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

14 **S** **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema**

$$\mathbf{2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15 **S** **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

16 **S** **Determina los valores de m para los cuales**

$$\mathbf{X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ verifique } X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.}$$

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \to 2m^2 - 5m + 2 = 0 \to$$

$$\rightarrow \; m = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \dfrac{1}{2}$

17 **S** **Resuelve:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - \;\; y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

Solución: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

Página 71

PARA PRACTICAR

18 **S** **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**, calcula** $\boldsymbol{A^2, A^3, \ldots, A^{128}}$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \;\; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \;\; A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19 **S** **Comprueba que** $\boldsymbol{A^2 = 2A - I}$**, siendo:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **e** $\boldsymbol{I}$ **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular $\boldsymbol{A^4}$**.**

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\[2em] 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$

$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

20 S **Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \to \quad \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} 4 - a = 2 & \to \quad a = 2 \\ -2 - b = -1 & \to \quad b = -1 \\ 2a + ab = a & \to \quad 4 - 2 = 2 \\ -a + b^2 = b & \to \quad -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

21 S **Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$**

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n - 1/7 & n - 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

22
S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

23
S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

☛ ***Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

24 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$$(A + I)^2 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^2 = -2A - I$$

25 **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\; \rightarrow \;\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\; \rightarrow \;\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

26 **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores del parámetro t:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$,
$\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$,
$\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Debemos estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } t$$

Los tres vectores son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de t.

b) Hallamos el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a : 2 \\ 2^a \\ 4^a : 2 \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 2 \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $t = 1$, $ran\ (M) = 2 \to$ Hay dos vectores linealmente independientes.
- *Si* $t \neq 1$, $ran\ (M) = 3 \to$ Hay tres vectores linealmente independientes.

27 S **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to$$

$\to ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\dfrac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\dfrac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \to ran\ (P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \to ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \to ran\ (Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \to ran\ (Q) = 3$

28 **Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\ (A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

29 **Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.**

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

30 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = 0$.**

$$A + mA + nI = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{lll} 2 + 2m + n = 0 & \to & n = 0 \\ 1 + m = 0 & \to & m = -1 \\ 2 + 2m = 0 & \to & m = -1 \\ 3 + 3m + n = 0 & \to & n = 0 \end{array}\right.$$

Solución: $m = -1$; $n = 0$

31 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad k = 1$$

32
S **Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.**

$$\text{Cada mes: } \quad \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Cada año: } \quad 12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$$

Página 72

33
S **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\text{a) } \begin{array}{l} \\ \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{P} & \text{G} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \\ \text{P} \\ \text{G} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} \\ \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{P} & \text{G} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{l} \\ \text{P} \\ \text{G} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{l} \\ \text{L3} \\ \text{L4} \\ \text{L5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$$

34 **S** **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

35 **S** **Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \;\rightarrow\; b = -1 \;\rightarrow\; c = 1 \\ a = -1 \;\rightarrow\; b = 1 \;\rightarrow\; c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

36 **S** **Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

37 S **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \quad a = b = c$$

38 S **Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

☞ ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\to\; A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\to\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

39 **S** **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal: $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☛ ***Haz*** $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\[2ex] \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\[2ex] y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\[2ex] y = x \\[2ex] y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\[2ex] y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \dfrac{4}{5}$; $y_1 = \dfrac{4}{5}$ $\qquad x_2 = -\dfrac{4}{5}$; $y_2 = -\dfrac{4}{5}$

40 **S** **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

41 **S** **Justifica por qué no es cierta la igualdad:** $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ **cuando A y B son dos matrices cualesquiera.**

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

42 **S** **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

43 **S** **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

Página 73

44 **S** **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

45 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

46 **Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?**

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q$; $p = r$

47 **S** **Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?**

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguiría siendo 2.

48 **S** **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango dos.

b) No. Podría ser dos o uno. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la primera fila y la tercera columna,

queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ($A$ tenía rango 3).

49 **S** **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \quad \to \quad BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \ \to \ 3a - 2b + c = 0 \ \to \\ \to \ c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

50 S **Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = \mathbf{0}$ (0 es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.**

Supongamos que se verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, pero que A sí tiene inversa, que existe A^{-1}.

Multiplicando la igualdad $A^2 = \mathbf{0}$ por $(A^{-1})^2$, quedaría:

$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \quad \to \quad (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \quad \to \quad I = \mathbf{0}$; lo cual es absurdo.

Por tanto, deducimos que no existe A^{-1}.

51 S **¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4?**

Razona la respuesta.

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

PARA PROFUNDIZAR

52 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \quad \text{pero} \quad B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1}.

53 S **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1}, coincide con su traspuesta, A^t, ha de tenerse que $A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

54 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 1$, $ran\ (M) = 2$
- *Si* $a = -2$, $ran\ (M) = 2$
- *Si* $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$, $ran\ (M) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 0$, $ran\ (A) = 2$
- *Si* $a \neq 0$, $ran\ (A) = 3$

55 **S** **Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.**

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

56 **Recuerda que una matriz A es *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz se llama *antisimétrica* si $-A^t = A$. (Tanto las matrices simétricas como las antisimétricas son, obviamente, cuadradas). Demuestra que en una matriz antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal son ceros.**

- Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$.
- La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).
- La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.
- Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

57 **Decimos que una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, así como los de cada columna y los de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k. ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.**

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es antisimétrica, $k = 0$.
- Buscamos las matrices mágicas antisimétricas de orden 3: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

  Veamos cómo es una matriz antisimétrica de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ antisimétrica si } A^t = -A; \text{ es decir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{array}\right.$$

Luego, una matriz *antisimétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que: $\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}$

es decir: $\left\{\begin{array}{l} c = -b \\ f = \ \ b \end{array}\right.$

Por tanto, las matrices mágicas antisimétricas de orden 3 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

58 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

Una matriz simétrica de orden 3 es de la forma:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (pues $A = A^t$). Para que sea mágica con $k = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \\ 5^a}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 2^a \\ 5^a}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \\ 5^a - 2 \cdot 3^a}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a : 2 \\ 5^a + 4^a}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{ll} a + b + c = 0 & \to \ a = -b - c = -f \\ b + d + e = 0 & \to \ b = -e = f \\ c + e + f = 0 & \to \ c = 0 \\ d + e + f = 0 & \to \ e = -f \\ 3d = 0 & \to \ d = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 0$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

59 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.**

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea mágica con $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ b + d + e = 3 \\ c + e + f = 3 \\ a + d + f = 3 \\ 2c + d = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \\ 5^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} + 2^{a} \\ 5^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} + 3^{a} \\ 5^{a} - 2 \cdot 3^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} : 2 \\ 5^{a} + 4^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} a + b + c = 3 \;\to\; a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b + d + e = 3 \;\to\; b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c + e + f = 3 \;\to\; c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f = 3 \;\to\; e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d = 3 \;\to\; d = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 3$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3 DETERMINANTES

Página 74

Determinantes de orden 2

■ **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solución: $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ *Solución:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$ *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solución: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0.$ *Solución:* $x = \frac{1402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

Página 75

Determinantes de orden 3

■ **Queremos calcular todos los posibles productos (de tres factores) en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna de esta matriz:**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigua cuántos productos hay y calcula todos ellos.

b) Hazlo de nuevo para una matriz 3 × 3 cualquiera.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Hay 6 productos:

$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ $\quad 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ $\quad 7 \cdot 8 \cdot 6 = 336$

$9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ $\quad 2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

b)

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ $\quad a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ $\quad a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ $\quad a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Determinantes de orden 4

■ **En una matriz 4 × 4, ¿cuántos productos de 4 factores hay en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna?**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Hay $4! = 24$ productos.

Determinantes de orden n

■ **¿Sabrías decir, en general, en una matriz cuadrada $n \times n$, cuántos productos de n factores, uno de cada fila y uno de cada columna, pueden darse?**

Hay $n!$ productos.

Página 78

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: (1ª) · 7 = (2ª)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: (2ª) · (–20) = (1ª)

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13$$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $|6A|$ **c)** $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ **d)** $|A^{-1}|$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $|6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$

c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$

d) $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-13} = -\dfrac{1}{13}$

Página 79

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2. Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 81

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª (3ª = (–2) · 1ª) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras (3ª = 1ª + 10 · 2ª) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos (1ª = 10 · 2ª + 3ª) (propiedad 9).

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Página 82

1. Justifica que los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

valen: a) 0, b) 0, c) 96 ó –96, d) 1 ó –1

a) La 4ª columna es proporcional a la 2ª (4ª = 9 · 2ª), luego el determinante vale 0 (propiedad 6).

b) La 3ª fila es combinación lineal de las otras tres (3ª = 100 · 4ª + 10 · 1ª + 2ª), luego el determinante es 0 (propiedad 9).

c) $4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot (-3) = -96$; este es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 96 ó –96, según el signo que le corresponda a dicho producto.

d) $1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 1 ó –1, según el signo que le corresponda a dicho producto.

Página 83

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 85

1. **Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2. Dada la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**:**

a) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 1ª fila por el correspondiente adjunto de la 3ª fila.

b) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 3ª columna por el adjunto de los correspondientes elementos de la 2ª columna.

c) Justifica por qué los dos resultados anteriores son cero.

a) $a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 44 - 7 \cdot 13 - 1 \cdot 41 = 132 - 91 - 41 = 0$

b) $a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-74) + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 13 = -74 + 126 - 52 = 0$

c) Por la propiedad 12.

3. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

También podríamos haber observado que la 4ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

c) $\begin{vmatrix}0&0&3&4\\1&1&1&0\\2&0&3&5\\0&2&0&1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3\cdot \begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&5\\0&2&1\end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\0&2&0\end{vmatrix} = 3\cdot(-12) - 4\cdot(-2) = -36+8 = -28$

(1) Desarrollando por la 1ª fila.

d) $\begin{vmatrix}3&-1&4&0\\5&6&2&0\\0&1&3&0\\8&6&7&1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}3&-1&4\\5&6&2\\0&1&3\end{vmatrix} = 83$

(1) Desarrollando por la 4ª columna.

Página 86

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}4&2&7&1\\2&-5&3&6\\2&0&4&-3\\6&2&8&0\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}3&-5&2&2\\4&7&8&27\\1&5&3&12\\5&1&0&6\end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&-1&2&1\\3&1&0&0&1\\-2&-3&-1&0&2\end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix}0&0&1&2\\3&0&1&0\\-2&1&0&3\\0&-4&2&1\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}4&2&7&1\\2&-5&3&6\\2&0&4&-3\\6&2&8&0\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{COLUMNAS}\\ 1^a-3\cdot 2^a\\ 2^a\\ 3^a-4\cdot 2^a\\ 4^a\end{array} \rightarrow \begin{vmatrix}-2&2&-1&1\\17&-5&23&6\\2&0&4&-3\\0&2&0&0\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\cdot \begin{vmatrix}-2&-1&1\\17&23&6\\2&4&-3\end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 145 = 290$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

b) $\begin{vmatrix}3&-5&2&2\\4&7&8&27\\1&5&3&12\\5&1&0&6\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{COLUMNAS}\\ 1^a-5\cdot 2^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4^a-6\cdot 2^a\end{array} \rightarrow \begin{vmatrix}28&-5&2&32\\-31&7&8&-15\\-24&5&3&-18\\0&1&0&0\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}28&2&32\\-31&8&-15\\-24&3&-18\end{vmatrix} = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

c) $\begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&-1&2&1\\3&1&0&0&1\\-2&-3&-1&0&2\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^a\\ 2^a\\ 3^a+2^a\\ 4^a\\ 5^a+2^a\end{array} \rightarrow \begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&0&1&4\\3&1&0&0&1\\-2&-3&0&-1&5\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&4\\3&1&0&1\\-2&-3&-1&5\end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{l}\text{FILAS}\\ 1^a - 3\cdot 2^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4^a + 2^a\end{array} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -16$$

d) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l}\text{FILAS}\\ 1^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4\cdot 3^a + 4^a\end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l}\text{COLUMNAS}\\ 1^a\\ 2^a\\ (-2)\cdot 2^a + 3^a\end{array} -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 9$$

Página 88

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4ª fila es la suma de la 2ª y la 3ª. Por tanto, *ran* $(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $ran\ (C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, segunda y cuarta fila son linealmente independientes.

La tercera fila es la suma de las dos primeras. Luego, $ran\ (D) = 3$.

Página 93

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 S **De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2 × 2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:**

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) Verdadero. Tiene las dos columnas iguales.

b) Verdadero. Si una fila está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Falso; sería $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Verdadero. Si la 2ª fila está multiplicada por 2, el determinante queda multiplicado por 2.

2 S **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 S Resuelve estas ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = sen\ x - cos\ x = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ x = cos\ x \quad \rightarrow \quad \frac{sen\ x}{cos\ x} = 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad tg\ x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\[2mm] x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in zc)$$

c) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

5 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

6 **S** **Halla el rango de las siguientes matrices:**

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(C) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$. La 2ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1ª fila depende de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Por tanto, *ran* $(C) = 3$.

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego, *ran* $(D) \geq 2$.

Veamos si la 3ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (D) = 3.$$

7 **Halla los valores de *a* que anulan cada uno de los siguientes determinantes:**

S

$$\textbf{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \quad \textbf{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \textbf{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} \quad \textbf{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrolla, iguala a 0 y resuelve la ecuación que obtengas.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \quad \rightarrow$

$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$

8 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

S

$$\textbf{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \quad \textbf{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad \textbf{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \textbf{d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

Página 94

PARA RESOLVER

9 **S** **Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es –5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues tiene dos filas iguales).}$$

10 **S** **Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:**

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

11 **S** **¿Para qué valores de a se anula este determinante?** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Calcula el rango de la matriz A en los siguientes casos:

$a = 1$ $a = 0$ $a = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a + 1^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \rightarrow a = 2$$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 0$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $|A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 3$$

12 **S** **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|B| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow$ $|B| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 3$

c) Por el ejercicio 11, sabemos que $|C| = 0 \rightarrow a = 2$, y que:

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $ran\ (C) = 3$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (C) = 4$

d) $D = \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (D) = 1$$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (D) = 2$$

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (D) = 2$

13 S **¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Son determinantes de matrices triangulares.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$

(Suponemos que $a \neq 0$).

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^{a}\\ 2^{a}-1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\\ 4^{a}-1^{a}\end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(4)}{=}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = -x\,[(-x-1)^2 - 1] = -x[x^2 + 1 + 2x - 1] =$$

$$= -x(x^2 + 2x) = -x^2(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(2 - x)$ factor común de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

(4) Desarrollamos por la 2ª fila.

d) $$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\,(x^3 + 1 + x - x) = (x-1)\,(x^3 + 1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1ª columna la 2ª.

(2) Desarrollamos por la 1ª columna.

14 **S** **Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -2-t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = -t^3 + 1 + 1 + t - t - t = -t^3 - t + 2 = (t-1)(-t^2 - t - 2) = 0$

$$\begin{cases} t = 1 \\ -t^2 - t - 2 = 0 \;\rightarrow\; t^2 + t + 2 = 0 \;\rightarrow\; t = -\dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-2} \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

- **Si $t = 1$**, queda:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$

- **Si $t \neq 1$** $\;\rightarrow\; |A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

- **Si $t = 0$**, queda:

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$

- **Si $t = \sqrt{2}$**, queda:

$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$

- **Si $t = -\sqrt{2}$**, queda:

$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2}$** $\;\rightarrow\; |B| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)^2 - 16 + 4(t+3) =$

$= (t+3)(t^2 - 2t + 1) - 16 + 4t + 12 = t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 + 4t - 4 =$

$= t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)(t+1)^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

• **Si** $\boldsymbol{t = 1}$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(C) = 2$$

• **Si** $\boldsymbol{t = -1}$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(C) = 2$$

• **Si** $\boldsymbol{t \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{t \neq -1}$ $\;\rightarrow\;$ $|C| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

Observamos que la 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª. Por tanto, para hallar el rango, podemos prescindir de una de esas tres columnas, por ejemplo de la 3ª.

Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = (9-t)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-t)(-1) = t - 9 = 0 \;\rightarrow\; t = 9$$

• **Si** $\boldsymbol{t = 9}$ $\;\rightarrow\;$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(D) = 2$

• **Si** $\boldsymbol{t \neq 9}$ $\;\rightarrow\;$ $ran\,(D) = 3$

e) $|E| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = t(t+1)(t+3) + t(t-1)(-2t-1) - 2t(t+3) =$

$= t^3 + 4t^2 + 3t - 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - 6t = -t^3 + 3t^2 - 2t = t(-t^2 + 3t - 2) = 0$

$$\begin{cases} t = 0 \\ -t^2 + 3t - 2 = 0 \;\rightarrow\; t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \end{cases}$$

• **Si** $\boldsymbol{t = 0}$, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(E) = 2$$

• **Si $t = 1$**, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow ran\ (E) = 2$$

• **Si $t = 2$**, queda:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (E) = 2$$

• **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2$** $\rightarrow$ $|E| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (E) = 3$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos que: $\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4 + 2 - 4t - t - 4 =$

$$= 2t^2 - 5t + 2 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• **Si $t = 2$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ iguales. Además, } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (F) = 2$$

• **Si $t = \frac{1}{2}$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Tenemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \rightarrow ran\ (F) = 3$

• **Si $t \neq 2$ y $t \neq \frac{1}{2}$** $\rightarrow$ $ran\ (F) = 3$

g) $\begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -2-t \end{vmatrix} = 9t - 18 = 0 \to t = 2$

• **Si $t = 2$,** tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \quad ran\ (G) = 2$

• **Si $t \neq 2$,** ran (G) = 3.

Página 95

15 S **Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{array}$$

$$(3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)(3-x)^3 = 3(1+x)(x-3)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(3 + 3x)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

16 **S** **Halla, en función de a, el valor de los determinantes siguientes:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1) \cdot 1 = (4a+1)$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(4a + 1)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= -a \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desarrollamos por la 4ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

17 **Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:**

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

S a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

18 **S** **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$**, calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \dfrac{1}{2} \cdot 5 = \dfrac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\dfrac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$= 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a}]{\text{FILAS}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3ª fila.

19 **S** **Las matrices** ***A*** **y** ***B*** **tienen 3 filas y 12 columnas pero, en el proceso de edición, algunas de estas se han borrado.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -7 & 5 & -2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, ¿cuál será el rango de C?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, sabemos que

$ran\,(A) \geq 2$. También sabemos, puesto que A solo tiene 3 filas, que $ran\,(A) \leq 3$. Por tanto, podemos afirmar que $2 \leq ran\,(A) \leq 3$; es decir, $ran\,(A)$ podría ser 2 ó 3.

- En el caso de la matriz B, tenemos que:

  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$; y B solo tiene tres filas,

  entonces $ran\,(B) = 3$.

- Si C es la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, por los resultados anteriores tendremos que $ran\,(C) = 3$.

20 S **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.**

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Pero $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, pues a y b son no nulos.

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran\,(A) = 2$

21 S **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:**

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b + c & a + c & a + b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2ª fila la 3ª.

(2) Sacamos $(a + b + c)$ factor común de la 2ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $ran\ (M) \le 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \quad \to \quad b = a \qquad\qquad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \quad \to \quad c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \quad \to \quad a = c$$

Por tanto:

- **Si** $\boldsymbol{a = b = c} \quad \to \quad ran\ (M) = 1$
- **Si** $\boldsymbol{a \ne b}$ **o** $\boldsymbol{b \ne c}$ **o** $\boldsymbol{a \ne c} \quad \to \quad ran\ (M) = 2$

22 **Estudia el rango de la matriz:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3ª fila o por la 3ª columna.

Por tanto, como $|A| \ne 0$, tenemos que $ran\ (A) = 3$.

23 **Calcula el valor de este determinante:** $\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a \\ 5^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -(-2) = 2$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

Página 96

CUESTIONES TEÓRICAS

24 **¿Cuál es el valor del determinante de la matriz unidad de orden n?**

¿Y el de una matriz triangular de orden n?

Justifica tus respuestas.

$det\,(I_n) = 1$. El determinante de una *matriz triangular de orden n* es el producto de los elementos de su diagonal principal (pues el resto de los productos que intervienen en la obtención del determinante serían cero). En el caso de la matriz unidad de orden n, tenemos un ejemplo de matriz triangular en la que los elementos de su diagonal principal son unos. Por eso, el determinante vale 1.

25 **Comprueba que el determinante de una matriz de orden 3 es igual al de su traspuesta.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando la definición de determinante, obtenemos que $|A^t| = |A|$. Lo vemos:

$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

$|A^t| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

Luego $|A| = |A^t|$.

26 **¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?**

a) $\boldsymbol{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}}$ **b)** $\boldsymbol{a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}}$

Solo podría ser b), puesto que en cada producto ha de aparecer un factor de cada fila y uno de cada columna.

27 **Comprueba que: $\boldsymbol{det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)}$ siendo $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices diagonales de orden 3.**

Sea: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A \cdot B| = a_{11}\,b_{11}\,a_{22}\,b_{22}\,a_{33}\,b_{33}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \\ |B| = b_{11}\,b_{22}\,b_{33} \end{array}\right\} \quad |A| \cdot |B| = a_{11}\,b_{11}\,a_{22}\,b_{22}\,a_{33}\,b_{33}$$

Luego, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

28 **S** **Justifica que** $\boldsymbol{det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}}$

☛ ***Ten en cuenta que:*** $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$

Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Como $A \cdot A^{-1} = I$, tenemos que:

$|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$. Pero $|I| = 1$ (ver ejercicio 24). Por tanto, queda:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(Observación: $|A| \neq 0$, puesto que existe A^{-1}, luego podemos dividir entre $|A|$).

29 **Si A es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de:**

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} + a_{24} A_{14}$$

sin conocer los elementos de la matriz?

El resultado es 0, pues tenemos un producto de los elementos de una fila (la 2ª) por los adjuntos de otra (la 1ª).

30 **S** **Dadas la matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula: $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.**

Justifica las respuestas.

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$ (ver ejercicio 28).

$$|B^t \cdot A| \underset{(1)}{=} |B^t| \cdot |A| \underset{(2)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$|(AB^{-1})^t| \underset{(2)}{=} |AB^{-1}| \underset{(1)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{3}{2}$$

(1) Tenemos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

31 **S** **De una matriz cuadrada A se sabe que su determinante vale –1, y que el determinante de $2A$ vale –8.**

¿Cuál es el orden de la matriz A? Razona la respuesta.

$|2A| = -8 = -1 \cdot 8 = -1 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot |A|$. Si tenemos en cuenta la siguiente propiedad de los determinantes:

"Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un nº, el determinante queda multiplicado por ese nº"; entonces, si A es una matriz cuadrada de orden n:

$|2A| = 2^n \cdot |A|$. En nuestro caso concreto, será $n = 3$.

Es decir, A es una matriz de orden 3.

32 **S** **Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que:**

a) $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A + B| = 0 = |A| + |B|$

33 **S** **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \;\;\to\;\; |A|^2 - |A| = 0 \;\;\to$

$\to\;\; |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$

(Hemos tenido en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$).

34 **S** **Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?**

Justifica tu respuesta.

Tendremos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Entonces:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \underset{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$. Por tanto, sí se verifica la igualdad.

(*) Aunque el producto de matrices no es conmutativo, el producto de números (los determinantes son números), sí lo es.

35 **Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz B?**

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3ª fila de B (la que hemos añadido respecto a A), es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene restando la 2ª menos la 1ª). Por tanto, B tendrá el mismo rango que A, es decir, $ran\,(B) = 2$.

36 **Si llamamos c_1, c_2, c_3 a los vectores columna de una matriz A, el determinante puede designarse así: $det(A) = det(c_1, c_2, c_3)$.**

Si $det(A) = 5$, ¿cuál será el valor de estos determinantes?

a) $\boldsymbol{det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)}$

b) $\boldsymbol{det(c_1, c_2, 2c_3)}$

c) $\boldsymbol{det(c_1, c_1 - c_2, c_3)}$

a) $det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3) \overset{(1)}{=} det(c_1, c_2, c_3) = 5$

(1) Sumamos a la 1ª columna la 2ª multiplicada por 3.

b) $det(c_1, c_2, 2c_3) \overset{(2)}{=} 2\ det(c_1, c_2, c_3) = 2 \cdot 5 = 10$

(2) Si multiplicamos una columna de una matriz por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) $det(c_1, c_1 - c_2, c_3) \overset{(3)}{=} det(c_1, -c_2, c_3) \overset{(2)}{=} -det(c_1, c_2, c_3) = -5$

(3) Restamos a la 2ª columna la 1ª.

37 a) Define a qué se llama rango de una matriz.

b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $\boldsymbol{ran(A) = ran(-A)}$ **($-A$ es la matriz opuesta de A).**

II) $\boldsymbol{ran(A) = ran(A^t)}$ **(A^t es la matriz traspuesta de A).**

III) $\boldsymbol{ran(A + B) = ran(A) + ran(B)}$

IV) $\boldsymbol{ran(A^2) = [ran(A)]^2}$

V) $\boldsymbol{ran(A) = ran(A^{-1})}$ **si A tiene inversa (A^{-1} es la matriz inversa de A).**

a) El rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes. También podemos definirlo como el máximo orden de sus menores no nulos.

b) I) **Verdadera**. El hecho de cambiar de signo los elementos de A, solo afectará al signo de los menores; pero el máximo orden de los menores no nulos (el rango) no se ve influido.

II) **Verdadera**. El número de filas y el número de columnas linealmente independientes es el mismo. En A^t solo hemos cambiado filas por columnas.

III) **Falso**. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \to \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran\ (A) = ran\ (B) = 2$ (pues $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$) y $ran\ (A + B) = 1$.

IV) **Falso**. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 2 y con $ran\ (A) = 2$, A^2 también será de orden 2; luego $ran\ (A^2) \leq 2$, y $[ran\ (A)]^2 = 2^2 = 4$ (si A^2 es de orden 2 *no* puede tener rango 4).

V) Si A es una matriz cuadrada de orden n, y existe su inversa, entonces $|A| \neq 0$ (y $|A^{-1}| \neq 0$). Luego, $ran\ (A) = ran\ (A^{-1}) = n$. Por tanto, la igualdad es **verdadera**.

Página 97

PARA PROFUNDIZAR

38 **S** **Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a-b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^a - 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3$$

(1) Sacamos $(a-b)$ factor común de la 1ª y de la 2ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3ª fila.

39 **Demuestra, sin desarrollar, que:** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

En el segundo miembro multiplica y divide la primera fila por a, la segunda por b y la tercera por c.

Procediendo como se indica en la ayuda, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

40 **Prueba que:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Este determinante se llama de Vandermonde.

Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2ª columna y $(c-a)$ de la 3ª columna.

Siguiendo las indicaciones dadas, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

41 **S** **Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a –1, y tal que su inversa coincida con su traspuesta.**

☛ ***Haz*** $\boldsymbol{A \cdot A^t = I}$ ***y*** $\boldsymbol{|A| = -1}$.

Hay 4 soluciones.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \\ ac+bd = 0 \\ c^2+d^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Como a, b, c, d son enteros, tenemos solo cuatro soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

42 **Demostración de que** $\boldsymbol{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$ **para determinantes de orden 2:**

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}$$

a) Comprueba que (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos $\boldsymbol{b_{ij}}$**. Llegarás a** $\boldsymbol{|A| \cdot |B|}$**, como se quería demostrar.**

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} = 0$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = 0$$

$$\text{b) } (2)\ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\ |A|$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12}\ |A|$$

Por tanto, queda:

$$|AB| = 0 + b_{11}b_{22}\ |A| - b_{21}b_{12}\ |A| + 0 = |A|\ (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$$

$$= |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

43 **La sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$,… tiene la peculiaridad de que cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores:**

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

para $n \geq 3$.

a) Demuestra por el método de inducción que:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

☛ ***Comprueba que $a_1 = 1$ y que $a_2 = 2$. Comprueba que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, desarrollando el determinante por la 1ª columna.***

b) Teniendo en cuenta lo anterior, di el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $a_1 = |1| = 1; \ a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$a_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n} \underset{(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} \underset{(2)}{=} a_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Desarrollamos el 2º determinante por la 1ª fila.

b) El determinante dado es el término a_8 de la sucesión anterior. Lo hallamos:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34$

Por tanto:

$$a_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 34$$

4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 98

Resolución de sistemas 2 × 2 mediante determinantes

■ **Resuelve, aplicando** $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ **e** $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$**, los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$

Comprueba, en cada caso, la solución que obtengas.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$

Por tanto: $x = \dfrac{156}{26} = 6;$ $y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$

Por tanto: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5;$ $y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320;$

Por tanto: $x = \dfrac{192}{64} = 3;$ $y = \dfrac{-320}{64} = -5$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix} = -30;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 28 \end{vmatrix} = 50;$

Por tanto: $x = \dfrac{-30}{-10} = 3;$ $y = \dfrac{50}{-10} = -5$

Página 99

Extensión del resultado a sistemas 3 × 3

■ **¿Cómo crees que sería la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas según la regla anterior? Pon las fórmulas correspondientes y aplícalas a la resolución de los sistemas siguientes:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right.$

Comprueba las soluciones.

Si tenemos un sistema 3×3:

$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}$ y llamamos: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$

$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix};$

entonces: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|},$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|},$ $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$

(siempre que $|A| \neq 0$).

Si aplicamos las fórmulas a la resolución de los sistemas propuestos, tenemos que:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -50;$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 10;$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 20 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30$

Por tanto: $x = \dfrac{-50}{-10} = 5;$ $y = \dfrac{10}{-10} = -1;$ $z = \dfrac{-30}{-10} = 3$

b) $\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + z = 3 \\ x - \ \ y + z = 1 \\ x - 2y \qquad = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Por tanto: $x = \dfrac{8}{2} = 4; \quad y = \dfrac{2}{2} = 1; \quad z = \dfrac{-4}{2} = -2$

Inversa de una matriz 2 × 2

■ **$x = \dfrac{a_{22}}{|A|}$, $y = \dfrac{-a_{21}}{|A|}$. Obtén, de forma similar, las expresiones de z y de t. Llegarás, así, a la siguiente conclusión:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z + a_{12}t = 0 \\ a_{21}z + a_{22}t = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a_{12}}{|A|}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

Por tanto: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

■ **Comprueba, efectuando el producto, que: $A \cdot A^{-1} = I$**

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

■ **Aplica la expresión anterior para calcular M^{-1} siendo: $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$**

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

■ **Haz los productos $M \cdot M^{-1}$ y $M^{-1} \cdot M$ y comprueba que, en ambos casos, obtienes la matriz unidad.**

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ **¿Por qué crees que es necesario que $|A| \neq 0$ para que una matriz cuadrada sea regular (tenga inversa)?**

En su obtención, dividimos por $|A|$.

Es necesario que $|A| \neq 0$ para que el sistema que obtenemos tenga solución única.

Página 101

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \;\; \to \;\; ran\,(A) = 2 \\ \\ |A'| = 0 \qquad\qquad \to \;\; ran\,(A') = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \;\to\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;\; \to \;\; ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \;\; \to \;\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. **Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \quad\quad z &= 2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \quad\quad z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right.$ **c)** $\left\{\begin{aligned} x + y + 2z \quad\quad &= 7 \\ 3x - y + \quad\quad 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= -13 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \quad\quad z &= 2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \text{ y } \ |A| = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(pues la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \ \rightarrow \ ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

Observación: Como la 4ª columna de A' y la 1ª son iguales, necesariamente $ran\,(A') = ran\,(A)$; es decir, el sistema es compatible.

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \quad\quad z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran\,(A) = 2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z \quad\quad &= 7 \\ 3x - y + \quad\quad 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= -13 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran\,(A) = 2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

Página 102

1. Enuncia la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3} \end{array}\right.$$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \;\;\rightarrow\;\; ran\,(A) = 3 = ran\,(A')$

Por tanto, el sistema es *compatible.*

Su solución es: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}, \;\; y = \dfrac{|A_y|}{|A|}, \;\; z = \dfrac{|A_z|}{|A|},$

siendo A_x la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes. Análogamente, A_y y A_z se obtienen sustituyendo en A la columna de los coeficientes de la incógnita correspondiente por la de los términos independientes.

2. Utilizando la regla de Cramer, resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - 3y + 5z = -24} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = -8} \\ \boldsymbol{x + y = 9} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7, \;\; y = 2, \;\; z = -5$

Página 103

3. Demuestra la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Procede de forma análoga a como se ha hecho en esta página.

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}, \;\; \text{con} \;\; |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hemos de despejar cada una de las incógnitas. Empecemos por la x.

Para despejar x, hemos de eliminar y, z. Esto se consigue multiplicando las tres ecuaciones, que llamamos (1), (2), (3), por los adjuntos de los coeficientes de la x:

$$(1) \cdot A_{11} \rightarrow a_{11} A_{11}\, x + a_{12} A_{11}\, y + a_{13} A_{11}\, z = c_1 A_{11}$$
$$(2) \cdot A_{21} \rightarrow a_{21} A_{21}\, x + a_{22} A_{21}\, y + a_{23} A_{21}\, z = c_2 A_{21}$$
$$(3) \cdot A_{31} \rightarrow a_{31} A_{31}\, x + a_{32} A_{31}\, y + a_{33} A_{31}\, z = c_3 A_{31}$$

Sumando, obtenemos una igualdad que vamos a analizar por partes:

– El coeficiente de la x es:

$$a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$$

– El coeficiente de la y es:

$$a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} = 0$$

Análogamente, se ve que el coeficiente de z es cero.

– El término independiente es:

$c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}$, que es el determinante de la matriz A_x que resulta al sustituir en A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes:

$$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Recapitulamos: al efectuar la suma $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenemos:

$$|A|x + 0y + 0z = |A_x|$$

Puesto que $|A| \neq 0$, podemos despejar la x, y obtenemos:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Para despejar la y habría que multiplicar las ecuaciones (1), (2), (3) por A_{12}, A_{22}, A_{32}, respectivamente. Y análogamente procederíamos para despejar z, obteniéndose:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Página 105

1. Halla los valores de las incógnitas en los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ \ y + 2z = 3 \\ -\ 2y + 7z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \text{ y } \ |A| = 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ (la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \ \rightarrow ran(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \ \rightarrow \ x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \ \rightarrow \ y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solución: $x = 1 + \lambda, \ \ y = 7\lambda, \ \ z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ \ y + 2z = 3 \\ -\ 2y + 7z = 10 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabemos, por el apartado a), que $ran(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 3} \\ \boldsymbol{y + z = 5} \\ \boldsymbol{x + z = 4} \\ \boldsymbol{5x - y + z = 6} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{3x + 4y = 4} \\ \boldsymbol{2x + 6y = 23} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \ ran\,(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \rightarrow ran\,(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 4 \\ 2x + 6y &= 23 \\ -2x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 106

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Por tanto, $ran\,(A) = 3 =$ *nº incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ x - 5y - 9z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = 2$

Podemos suprimir la 3ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\} \textit{Solución: } x = -\lambda, \;\; y = -2\lambda, \;\; z = \lambda$$

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \;\to\; ran\,(A) = 3 = n^{\underline{o}} \textit{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 0$

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 2t \\ x - y + z = t \end{array}\right\} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solución: $x = \lambda, \;\; y = -\lambda, \;\; z = 0, \;\; t = 2\lambda$

2. Resuelve:

a) $$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (A) = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de las dos últimas ecuaciones y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3z \\ y = -z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ y = -z \end{array}\right\}$$

Solución: $x = -5\lambda,\ \ y = -\lambda,\ \ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{rrrrl} x & & +3z & & = 0 \\ & y - & & t & = 0 \\ x + & y + & & 2t & = 0 \\ 2x + & 2y + & 3z + & t & = 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\ (A) = 3 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{rl} x \quad - 3z & = 0 \\ y & = t \\ x + y & = -2t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Solución: $x = -3\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = \lambda,\ \ t = \lambda$

Página 108

1. Discute y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + az = 0} \\ \boldsymbol{ax - y = -1} \\ \boldsymbol{x + 4y + 6z = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = k} \\ \boldsymbol{kx - y = 13} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 16} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{rl} x + y + az & = 0 \\ ax - y & = -1 \\ x + 4y + 6z & = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

• **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

• **Si $a = -3/4$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

• **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}$, $y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$, $z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

• **Si $k = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, \; y = -3$

• **Si $k = 5/3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{2}, \; y = \dfrac{-23}{6}$

• **Si $k \neq 2$ y $k \neq 5/3$** $\rightarrow$ $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema es *incompatible*.

2. Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

• **Si $a = 0$**, queda:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \ \ y = \lambda$

• **Si $a = 1$**, queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \ \ y = 0$

• **Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = 2$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ \ y = 0$

Página 110

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -1 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -8 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & 12 & 10 & 6 \\ -9 & 14 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 & 3 \\ 6 & 12 & -10 & 6 \\ -9 & -14 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 & -1 \\ -6 & 12 & -14 & 2 \\ 3 & -10 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 & 1 \\ 6 & -12 & 14 & -2 \\ -3 & 10 & -7 & 1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 111

1. Expresa en forma matricial y resuelve (ten en cuenta el ejercicio 1 de la página anterior):

a) $\left\{\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado A^{-1}.

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 106, \;\; y = 64, \;\; z = 36$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - \;\; y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \;\rightarrow\; X = B^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, \;\; y = -5$

2. Expresa en forma matricial y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - 2y - 3z - t = 19} \\ \boldsymbol{y + 2z \qquad = 12} \\ \boldsymbol{2y + 3z + t = 16} \\ \boldsymbol{3x - 2y \qquad + t = 5} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y \qquad = 5} \\ \boldsymbol{y + z \qquad = -1} \\ \boldsymbol{z + t = 4} \\ \boldsymbol{t = 2} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z - t = 19 \\ y + 2z \qquad = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y \qquad + t = 5 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -5 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = -1$

$$= \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -175 \\ -196 \\ 68 \\ 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ (196/5) \\ -(68/5) \\ -(108/5) \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 35, \;\; y = \frac{196}{5}, \;\; z = -\frac{68}{5}, \;\; t = -\frac{108}{5}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y \qquad = \ \ 5 \\ y + z \qquad = -1 \\ z + t = \ \ 4 \\ t = \ \ 2 \end{array}\right\}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 2 de la página anterior hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \rightarrow X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 8$, $y = -3$, $z = 2$, $t = 2$

Página 117

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Escribe en forma matricial los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + z - t = 2 \\ 3y + t = 1 \\ 2x + y - t = 0 \end{array}\right.$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 **Escribe en la forma habitual estos sistemas:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

3 **Estudia la compatibilidad de estos sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y - 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{3x \quad\quad + z = 3} \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x - 2y - 7z = 0} \\ \boldsymbol{y + z = -1} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 0} \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 3y + z = -1} \\ \boldsymbol{x - y - z = -1} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 5} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}$ $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \;\to\; x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\}$ *Solución:* $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}}_{A} \;\middle|\; \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 0 \end{array}\right)$.

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\;$ *ran* $(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\;$ *ran* $(A') = 2 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}}_{A} \;\middle|\; \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 6 \end{array}\right)$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Luego *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{Sumando: } x = 3 + 2y \\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7y \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda,\;\; y = \lambda,\;\; z = 3 + 7\lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\; + z = 3 \end{array}\right\}\; A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right)$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, $ran\ (A') = 2 = ran\ (A) < n^{\underline{o}}\ incógnitas$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\; + z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad\;\; = 3 - z \end{array} \left\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array} \right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$

e) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ \quad\;\; y + z = -1 \\ 2x + 3y \quad\; = 0 \end{array}\right\}\; A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$, with A the coefficient block $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}$

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$

4 Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\}$ $A' = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \to |A| = -82 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to |A| = -4 \neq 0$, with A the coefficient block $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1, \ z = 1$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \ A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right.\right) \ \longrightarrow \ |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \ A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -3 \end{array}\right.\right) \ \longrightarrow \ |A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$

e) $\left.\begin{array}{r} x+y-z+t=1 \\ x-y \qquad -t=2 \\ z-t=0 \end{array}\right\}$ $A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Soluciones:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

f) $\left.\begin{array}{r} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x-y=4+z-t \\ x+y=2-z+t \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1-z+t$$

Soluciones: $x=3, \quad y=-1-\lambda+\mu, \quad z=\lambda, \quad t=\mu$

5 **S** **Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \to \quad \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

6 **Estudia y resuelve los sistemas, cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ (las tres primeras columnas forman A)

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{-1}{3}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$ (las tres primeras columnas forman A)

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego, *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{array}\right\}$ Es un sistema homogéneo.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad |A'| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 3. \text{ Es } \textit{compatible indeterminado.}$$

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro. Así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2t & 4 & 3 \\ -4t & 7 & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{6t}{16} = \frac{3t}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2t & 3 \\ 1 & -4t & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{4t}{16} = \frac{t}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2t \\ 1 & 7 & -4t \end{vmatrix}}{16} = \frac{-14t}{16} = \frac{-7t}{8}. \quad \textit{Soluciones: } \left(\frac{3}{8}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{-7}{8}\lambda, \lambda\right)$$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Luego, *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4. \quad \textit{Solución: } x = 2, \ y = 3, \ z = 4$$

7 **Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran\ (A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $\left.\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: $ran\ (A) = 3 =$ *nº incógnitas*.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

8 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ y + 3z &= 0 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= -2 \\ x - 2y - 3z &= 1 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ y + 3z &= 0 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$

$|A| = 2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1,\;\; y = 0,\;\; z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y - \;\; z = \;\;3 \\ 2x + \;\; y + \;\; z = -2 \\ x - 2y - 3z = \;\;1 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1,\;\; y = 2,\;\; z = -2$

9 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2x + 3y = 5} \\ \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{ax + \;\; y = 3} \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + \;\; y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\,(A) = ran\,(A') \;\rightarrow\;$ *Sistema compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\,(A) \neq ran\,(A') \;\rightarrow\;$ *Sistema incompatible.*

Página 118

10 **S** **Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:**

a) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $|A| = -7 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$X \cdot A = I \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1}$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto: $X = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación *no* tiene solución.

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

11 S **Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:**

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = a^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2a} & \frac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to |A| = (a-2)\,a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

12
S

Consideramos la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

13
S

Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 4 \\ m \\ 2 \end{array}\right.\right)$

$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

- **Si $m = -1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} m-1 \\ m \\ 1 \end{array}\right.\right)$

$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = 2$,** queda:

$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.\right)$. Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = ran\,(A) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, con A la matriz de las tres primeras columnas.

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

- **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

entonces: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. Sistema *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$**, queda: $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado*.

d) $\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, con A la matriz de las tres primeras columnas.

$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

- **Si $m = 3$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

- **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$. La 1ª y la 3ª fila son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$.

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado*.

e) $\left.\begin{array}{r} x \qquad + \ 2z = \ \ 3 \\ 3x + \ y + \ \ z = -1 \\ 2y - \ \ z = -2 \\ x - \ y + mz = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{array}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) =$$

$$= 18(-m - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = 3$

- **Si $m = -2$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*.

- **Si $m \neq -2$** $\rightarrow$ *ran* (A') = 4 ≠ *ran* (A) = 3. Sistema *incompatible*.

f) $\left.\begin{array}{r} (1+m)x + \qquad y + \qquad z = 1 \\ x + (1+m)y + \qquad z = m \\ x + \qquad y + (1+m)z = m^2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1+m & m^2 \end{array}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^3 + 3m^2 = m^2(m+3) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si $m = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  El sistema es *incompatible*. (La 1ª ecuación contradice las otras).

- **Si $m = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$

Además, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3$

Luego el sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{m \neq -3}$ $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*.

14 **S** **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro** $\boldsymbol{a}$**:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \;\rightarrow\; a = -5$

- **Si** $\boldsymbol{a = -5}$ $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -5}$ $\rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \dfrac{1 \pm 5}{-2}$ $\begin{array}{l} a = -3 \\ a = 2 \end{array}$

- **Si** $\boldsymbol{a = -3}$ **o** $\boldsymbol{a = 2}$ $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -3}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 2}$ $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $(0, 0, 0)$.

c) $\left.\begin{array}{r} ax + \ \ \ y - \ \ z = 0 \\ x + \ \ 2y + \ \ z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$$|A| = -2a - 5 = 0 \quad\to\quad a = \frac{-5}{2}$$

• **Si** $\boldsymbol{a = -\frac{5}{2}}$ $\to$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\to\; ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si** $\boldsymbol{a \neq -\frac{5}{2}}$ $\to$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - \ \ z = 0 \\ 4x + 2y + az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = 3a - 46 = 0 \quad\to\quad a = \frac{46}{3}$$

• **Si** $\boldsymbol{a = \frac{46}{3}}$ $\to$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \;\to\; ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si** $\boldsymbol{a \neq \frac{46}{3}}$ $\to$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

15 S **Determina los valores de $\boldsymbol{m}$ para los cuales son incompatibles estos sistemas:**

a) $\begin{cases} mx - y - \ \ z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + \ \ z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (m+1)\,x + \ \ y + \ \ z = 3 \\ x + \ 2y + mz = 4 \\ x + my + \ 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + \qquad y - \ \ z = m - 4 \\ (m-6)\,y + 3z = 0 \\ (m+1)\,x + \ \ 2y \qquad = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} mx - y - \ \ z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + \ \ z = -1 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} m \\ m \\ -1 \end{array}\right.\right)$

$$|A| = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2 = 0 \quad\to\quad m = -1$$

• **Si** $\boldsymbol{m = -1}$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Contradictorias. El sistema es *incompatible*.

• **Si $m \neq -1$**, es compatible determinado, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

• Por tanto, solo es incompatible para $m = -1$.

b) $\left.\begin{array}{r} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m & 4 \\ 1 & m & 2 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = -m^3 - m^2 + 6m = -m(m-2)(m+3) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

• **Si $m = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces: $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$ $\rightarrow$ *Compatible indeterminado.*

• **Si $m = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

• **Si $m = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Como } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -45,$$

entonces: $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

• **Si $m \neq 0$, $m \neq 2$ y $m \neq -3$** $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible para $m = 2$ y para $m = -3$.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m-4 \\ 0 & m-6 & 3 & 0 \\ m+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$$|A| = m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$$

• **Si $m = 5$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$; el sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si** $\boldsymbol{m = -3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 72,$$

entonces $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

• **Si** $\boldsymbol{m \neq 5}$ **y** $\boldsymbol{m \neq -3}$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible solo para $m = -3$.

16 **S** **¿Existe algún valor de $\boldsymbol{a}$ para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?**

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = 9a + 27 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -3$

• **Si** $\boldsymbol{a = -3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

$ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3 \quad \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

• **Si** $\boldsymbol{a = -3}$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado*.

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$ $\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}$

• **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Contradictorias. El sistema es *incompatible.*

• **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$, donde A son las tres primeras columnas. Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado.*

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

c) $\left.\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a+2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 3 & 1 & a+2 \end{array}\right)$, donde A son las tres primeras columnas.

$|A| = a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

• **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$. La primera fila es la tercera menos la segunda.

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado.*

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = -1$.

17 **S** **Discute y resuelve según los valores de m:** $\left\{\begin{array}{l} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{r} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 2-2m \\ 1 & m & m-1 \end{array}\right)$, donde A son las dos primeras columnas.

$|A| = m^2 - 1 = 0 \;\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

• **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x + y = 0 \;\rightarrow\; y = x$. *Soluciones:* $x = \lambda,\; y = -\lambda$

• **Si $m = -1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

• **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2m & 1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{-2m^2+m+1}{m^2-1} = \frac{(-2m-1)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{-2m-1}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2-2m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m^2+m-2}{m^2-1} = \frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+2}{m+1}$$

Solución: $x = \dfrac{-2m-1}{m+1};\; y = \dfrac{m+2}{m+1}$

18 S **Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:**

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$AXB = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \;\rightarrow$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 119

19 **S** **Dada** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$**, halla una matriz** $\boldsymbol{X}$ **tal que** $\boldsymbol{A\,X\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$**.**

☛ ***Multiplica dos veces por*** $\boldsymbol{A^{-1}}$***, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} $(|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

20 **Dadas las matrices:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}}$$

halla la matriz $\boldsymbol{X}$ **que verifica** $\boldsymbol{AB + CX = D}$**.**

$$AB + CX = D \;\rightarrow\; CX = D - AB \;\rightarrow\; X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculamos C^{-1} $(|C| = -2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe $C^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(C) \longrightarrow (Adj\,(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21 **Halla X tal que $3AX = B$, siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$3AX = B \quad \to \quad X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \quad \to \quad$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

22 **Resuelve la ecuación:** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \quad \to \quad$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

23 **S** **Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro a, estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\left\{\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\quad - az = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax \qquad\quad = 2 \\ \qquad ay + 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\quad - az = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$ (las tres primeras columnas forman A) $\quad |A| = 1 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Observamos que la 1ª y la 3ª columna son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 1ª ecuación:

$\left.\begin{array}{l} x + 8y = 1 - 23z \\ x \qquad = 1 + z \end{array}\right\}$ $8y = 1 - 23z - 1 - z = -24z \ \rightarrow \ y = -3z$

Soluciones: $(1 + \lambda, -3\lambda, \lambda)$

- **Si $a = -1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Luego, $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{3 - 3a}{1 - a^2} = \frac{3(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{3}{1 + a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a-1}{(1-a)(1+a)} = \frac{-(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{-1}{1+a}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{1+a}$, $y = \dfrac{3}{1+a}$, $z = \dfrac{-1}{1+a}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax \quad &= 2 \\ ay + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $A' = \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{matrix}\right.}_{A} \left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$$|A| = -a(2-a) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 0$**, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$. Sistema **incompatible** (la 2ª ecuación es imposible).

- **Si $a = 2$**, queda:

  $A' = \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right.}_{A} \left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$. La 1ª y la 3ª columna son iguales.

  Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

  El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación:

  $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x \quad &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 - x - z = -z \end{aligned}\right\}$ *Soluciones:* $(1, -\lambda, \lambda)$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{2}{a}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-a(2-a)}{-a(2-a)} = 1; \qquad \textit{Solución: } x = \frac{2}{a},\ y = \frac{-2}{a},\ z = 1$$

24 **S** **Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:**

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a-2 \end{aligned}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{array}\right)$$

(las tres primeras columnas forman A)

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$ La 1ª y la 3ª fila son iguales.

(las tres primeras columnas forman A)

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; luego, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.* Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3ª ecuación (puesto que es igual que la 1ª):

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} y + 3z &= -x \\ y + 2z &= 1 - x \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{x-3}{-1} = 3 - x; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Soluciones: $x = \lambda, \; y = 3 - \lambda, \; z = -1$

- **Si $a = -2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

(las tres primeras columnas forman A)

Como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20$ y $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$.

El sistema es *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *nº incógnitas.* El sistema es *compatible determinado.*

25 **S** **Averigua los valores de α para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geométricamente los resultados obtenidos:**

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$ (con A la matriz de las tres primeras columnas)

$|A| = \alpha - 9 = 0 \rightarrow \alpha = 9$

- **Si $\alpha = 9$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, entonces:

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 - 2z \\ x + 2y = 5 - 9z \end{array}\right\}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 5-9z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 5z$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & 5-9z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 7z$

Soluciones: $x = 1 + 5\lambda$, $y = 2 - 7\lambda$, $z = \lambda$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en una recta.

- **Si $\alpha \neq 9$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \alpha \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{\alpha - 9}{\alpha - 9} = 1$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & \alpha \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{2\alpha - 18}{\alpha - 9} = \dfrac{2(\alpha - 9)}{\alpha - 9} = 2$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{0}{\alpha - 9} = 0.$ *Solución:* $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 2, 0).

b) $\left.\begin{array}{r} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right)$ (con A la matriz de las dos primeras columnas)

$|A| = -\alpha^2 + 1 = 0$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

• **Si** $\alpha = 1$, queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x - y = 1 \quad \to \quad x = 1 + y$. *Soluciones:* $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$.

Geométricamente, son rectas coincidentes (se trata de la misma recta).

• **Si** $\alpha = -1$, queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

Geométricamente, son dos rectas paralelas.

• **Si** $\alpha \neq 1$ **y** $\alpha \neq -1$ $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\alpha - 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-1}{1 + \alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{1 + \alpha}$; $y = \dfrac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$

Geométricamente, son dos rectas que se cortan en un punto.

26 **S** **Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 2$:**

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} \lambda \\ 2 \\ \lambda \end{array}\right)$$

$|A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \to \quad \lambda = -1$

• **Si** $\lambda = -1$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right)$$

La 1ª y la 3ª ecuación son iguales.

Como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{l} -x - y = -1 - 2z \\ 2x - y = \;\;2 + \;\;z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = 1 + 2z \\ 2x - y = 2 + \;\;z \end{array}\right\} \text{ Sumando: } 3x = 3 + 3z \;\;\to\;\; x = 1 + z$$

$y = 1 + 2z - x = 1 + 2z - 1 - z = z$

Soluciones: $x = 1 + \lambda,\;\; y = \lambda,\;\; z = \lambda$

- **Si $\lambda \neq -1$** $\;\to\;$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos para el caso en que $\boldsymbol{\lambda = 2}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \qquad \textit{Solución: } x = \frac{2}{3},\;\; y = \frac{2}{3},\;\; z = \frac{2}{3}$$

27
S
Halla, en función de $\boldsymbol{a}$, el rango de la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}}$ y calcula, si existe, la matriz inversa $\boldsymbol{A^{-1}}$ en los casos $\boldsymbol{a = 1}$ y $\boldsymbol{a = -1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \;\to\; |A| = a^2 + 4a + 3 = 0 \;\to$$

$$\to\;\; a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} a = -1 \\ a = -3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & a & \boxed{-3} \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por tanto:

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$ o $\boldsymbol{a = -3}$** $\;\to\;$ $ran\,(A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$ y $\boldsymbol{a \neq -3}$** $\;\to\;$ $ran\,(A) = 3$

Así, si $a = -1$, como $|A| = 0$, no existe A^{-1}.

Para $a = 1$, $|A| = 8 \neq 0$, sí existe A^{-1}. La calculamos en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -12 & -4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

28 S **Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?

b) Calcula A^{-1} cuando exista.

c) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

a) $|A| = b$ será el seno de algún número real cuando $-1 \le b \le 1$.

b) Existirá A^{-1} cuando $|A| \ne 0$, es decir, cuando $b \ne 0$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \to \begin{cases} a = -\dfrac{a}{b} \to ab + a = 0 \to a(b+1) = 0 \\ b = \dfrac{1}{b} \to b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \to a = 0 \\ b = -1 \to a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

$A = A^{-1}$ cuando $\begin{cases} \bullet\ a = 0 \text{ y } b = 1 \to (0, 1) \\ \bullet\ b = -1 \text{ y } a \text{ cualquier número real} \to (a, -1) \end{cases}$

29 S **Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son invertibles y calcula:**

a) A^{-1} si $t = 1$ **b) B^{-1} si $t = 2$**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

30 S **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:**

a) Encuentra los valores de λ para los que AB es invertible.

b) Determina los valores de λ para los que BA es invertible.

c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \end{cases}$$

$A \cdot B$ es invertible cuando $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = 0 \;\rightarrow\; B \cdot A$ no es invertible.

c) $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right);$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado,* para cualquier valor de a y b. Por tanto, no puede ser *compatible determinado.*

Página 120

31 **S** **En el supuesto de que exista, calcula una matriz X tal que $AX = B$ en los siguientes casos:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 4 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. Luego:

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -14 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para poder efectuar el producto $A \cdot X = B$, X debería ser (si existiera) de dimensión 2×3.

Sea $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2x+a & 2y+b & 2z+c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x + a = 2 \quad \to \quad x = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2x + a = 1 \quad \to \quad 2x = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \quad \to \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$3a = 5 \quad \to \quad a = \frac{5}{3}$$

No tiene solución. Luego *no* existe X tal que $AX = B$.

32 **S** **Dado el sistema:** $S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$

a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α y β.

b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \qquad + \quad z = \beta \\ x \qquad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) Si $\alpha = \beta = 1$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right)$, con $|A| = -2$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}. \quad \textit{Solución:} \ x = \frac{-1}{2}, \ y = \frac{3}{2}, \ z = \frac{3}{2}$$

33 **a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:** $\left\{\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right.$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$, where the first three columns form A.

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- **Si $a = -2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

(the first three columns form A)

entonces *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

b) **Para $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \text{ y sabemos que } |A| = 4.$$

(the first three columns form A)

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0. \quad \textit{Solución: } x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{-1}{2}, \; z = 0$$

CUESTIONES TEÓRICAS

34 S **En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:**

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si *ran* (A) = *ran* (A') < *nº incógnitas*.

b) No, pues al ser *ran* (A) < *nº incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2º miembro las incógnitas que sea necesario.

35 S **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3.**

¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que *ran* (A) = *ran* (A') = = *nº incógnitas* = 3. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial (0, 0, 0).

36 **¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?**

La condición necesaria y suficiente para que una matriz, A, cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

37 **Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?**

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

38 S **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?**

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

39 **¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?**

$$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

40 **S** **Dadas estas ecuaciones:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

a) Por ejemplo, $3x - 2y + z = 1$ contradice la 1ª ecuación; luego, si añadimos esta ecuación, el sistema obtenido sería incompatible.

b) Por ejemplo, si añadimos la ecuación $y = 0$, como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ el sistema sería compatible determinado.

41 **S** **Representa matricialmente los sistemas:**

$$s: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{cases} \qquad s': \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$**. Justifica la relación obtenida.**

SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ $(|A| = 1 \neq 0)$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones obtenidas son cada una de las columnas de la matriz inversa. Observamos que las matrices de los términos independientes de los dos sistemas son las columnas de la matriz identidad. Por tanto, las incógnitas que hallamos son los elementos de la matriz inversa.

42 **S** **Demuestra que no hay valores de m para los que el siguiente sistema no tenga solución:**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

(The first three columns, A.)

$|A| = 4 - m = 0 \quad \to \quad m = 4$

- **Si** $\boldsymbol{m = 4}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right).$$ La 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª.

(The first three columns, A.)

Luego, $ran\ (A) = ran\ (A')$. El sistema es compatible. (En este caso sería compatible indeterminado, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 2$).

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 4} \quad \to \quad ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. El sistema es compatible determinado.

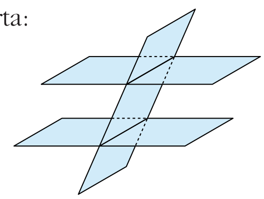
Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

43 S **Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos y el de la matriz ampliada tres, ¿qué interpretaciones geométricas podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.**

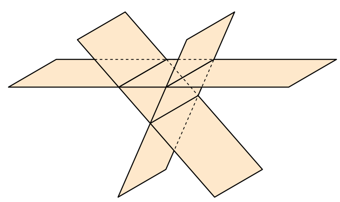
Si $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema es incompatible.

Interpretaciones geométricas posibles:

1) Dos planos paralelos y otro que los corta:



2) Tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres:



Un ejemplo de cada uno de los dos casos sería:

1) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{array}\right\}$

Página 121

44 **S** **Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A, ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible y determinado?**

No. Si uno de ellos es compatible determinado es porque $ran\ (A) = ran\ (A') = 4$. Por tanto, si A es la misma matriz en los dos sistemas, también en el otro será $ran\ (A) = 4$. Luego los dos serían compatibles determinados.

45 **S** **¿Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineal homogéneo no tenga solución? ¿Puede ocurrir que tenga infinitas soluciones? Razona las respuestas.**

Un sistema homogéneo siempre tiene, al menos, la solución trivial (0, 0, 0). Además, $ran\ (A) = ran\ (A')$; luego siempre es compatible. Si $ran\ (A) =$ *nº incógnitas*, entonces solo tendría la solución trivial; y, si $ran\ (A) <$ *nº incógnitas*, sería compatible indeterminado, es decir, tendría infinitas soluciones.

46 **S** **El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?**

La matriz ampliada, A', podría tener rango 3 o rango 4.

- Si $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema sería compatible determinado, es decir, con una sola solución.
- Si $ran\ (A) = 3 \neq ran\ (A') = 4 \rightarrow$ El sistema sería incompatible, sin ninguna solución.

47 **S** **Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

La ecuación matricial dada la podemos escribir así:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{array}\right\} . \text{ Si llamamos } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces: $AX = 0$

Por tanto, la matriz A que buscamos es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

PARA PROFUNDIZAR

48 **a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?**

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - 2y & = & 1 \\ y + z & = & a \\ x - 3z & = & -1 \\ y - z & = & 2 \end{array}\right.$$

b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

a) $\left.\begin{array}{rl} x - 2y & = 1 \\ y + z & = a \\ x \quad - 3z & = -1 \\ y - z & = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} x - 2y & = 1 \\ x \quad - 3z & = -1 \\ y - z & = 2 \\ y + z & = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \left|\,\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ a \end{matrix}\right.\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 3 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$\to \quad a = 14$

Por tanto, $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \textbf{Si}\ \ \boldsymbol{a = 14} \ \to \ ran\ (A) = ran\ (A') = 3 \ \to \ \textit{Compatible determinado} \\ \bullet\ \textbf{Si}\ \ \boldsymbol{a \neq 14} \ \to \ ran\ (A) = 3 \neq ran\ (A') = 4 \ \to \ \textit{Incompatible} \end{array}\right.$

b) *No*, por lo que hemos visto en el apartado anterior.

49 **Estudia y resuelve cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y \quad + 2t = 3} \\ \boldsymbol{3x - y + z - t = 1} \\ \boldsymbol{5x - 3y + 2z - 4t = a} \\ \boldsymbol{2x + y + z + t = 2} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{ax \quad + z + t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - 2t = 2} \\ \boldsymbol{az - t = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{rl} x + y \quad + 2t & = 3 \\ 3x - y + z - t & = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t & = a \\ 2x + y + z + t & = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{matrix}}_{A} \left|\,\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{matrix}\right.\right)$

$$|A| = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 3$$

(La 4ª columna depende linealmente de las tres primeras).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & -1 & \boxed{0} & a - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a - 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{vmatrix} = 3(a + 1) = 0 \quad \to \quad a = -1$$

- **Si $a = -1$** $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3 <$ *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 - 2t \\ 3x - y + z = 1 + t \\ 2x + y + z = 2 - t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2t & 1 & 0 \\ 1+t & -1 & 1 \\ 2-t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2t & 0 \\ 3 & 1+t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-2t \\ 3 & -1 & 1+t \\ 2 & 1 & 2-t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3}, \quad y = \dfrac{4-4\lambda}{3}, \quad z = \dfrac{-8+5\lambda}{3}, \quad t = \lambda$

- **Si $a \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* $(A) = 3 \neq$ *ran* $(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.

b) $$\left.\begin{array}{r} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a}}]{\text{FILAS}} a \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad -1} \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot a^2 = a^3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0$$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow \; z = 1 \\ \rightarrow \; z = 2 \\ \rightarrow \; t = 0 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \textit{Incompatible}$$

- **Si $a \neq 0$** $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 4$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Soluciones: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}$, $y = \dfrac{1}{a^2}$, $z = \dfrac{-1}{a}$, $t = -1$

50 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros que contienen:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad - z = b \\ x \qquad + z = c \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad + z = b \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right)$

$|A| = 5a = 0 \rightarrow a = 0$

- **Si $a = 0$**, queda:

$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \rightarrow b = -4$

- **Si $a = 0$ y $b = -4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a = 0$ y $b \neq -4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = 2 ≠ *ran* (A') = 3. El sistema es *incompatible.*

• **Si $a \neq 0$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} a - 1 \\ a \\ b \end{array}\right.\right)$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

• **Si $a = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$ Contradictorias, a no ser que $b = 0$.

— Si $a = 1$ y $b \neq 0$ $\rightarrow$ *Sistema incompatible.*

— Si $a = 1$ y $b = 0$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. La primera fila y la tercera son iguales.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si $a = 2$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$ La primera y la tercera columnas son iguales.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0$ $\rightarrow$ $b = 1$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

c) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad\ \ - z = b \\ x \qquad\ \ + z = c \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$, with A the matrix of the first three columns.

$|A| = 6 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

d) $\left.\begin{array}{l} ax + \ \ y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad\ \ + z = b \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & a & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, with A the matrix of the first three columns.

$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ a = \ \ 2 \end{array}$

- **Si** $\boldsymbol{a = -1}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \;\rightarrow\; b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = -1$ y $b = 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si** $\boldsymbol{a = 2}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \;\rightarrow\; b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = 2$ y $b = 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado.*

— Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

51 **Calcula los valores de a y b para los cuales este sistema tiene infinitas soluciones. Resuélvelo para esos valores:**

a) $\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + y + z &= -b \\ x - ay + z &= b \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$, donde A son las tres primeras columnas.

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

• **Si $a = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A

— Si $a = 1$ y $b = 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 1 $\rightarrow$ *Compatible indeterminado.*

$x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z$. *Soluciones:* $x = 1 - \lambda - \mu$; $y = \lambda$; $z = \mu$

— Si $a = 1$ y $b \neq 1$ $\rightarrow$ *Incompatible.*

• **Si $a = -2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2$ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3b + 6 = 0 \rightarrow b = -2$

— Si $a = -2$ y $b = -2$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 $\rightarrow$ *Compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= 1 - z \\ x - 2y &= -2 - z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -2-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z; \; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-z \\ 1 & -2-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z+3}{3} = \frac{3(z+1)}{3} = 1+z$$

Soluciones: $x = \lambda, \;\; y = 1 + \lambda, \;\; z = \lambda$

— Si $a = -2$ y $b \neq -2 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Incompatible.*

— Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) \neq$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado.*

b) $\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -a & 1 & b \end{array}\right)$, where A is the coefficient part (first three columns).

$$|A| = (a+1)(a-1) = 0 \; \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

• **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias a no ser que } b = -b \;\rightarrow\; b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = -1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La 2ª y 3ª filas son iguales.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -x + y = 4 - z \\ x + y = -z \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2y = 4 - 2z \;\rightarrow\; \begin{cases} y = 2 - z \\ x = -z - y = -z - 2 + z = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x = -2, \;\; y = 2 - \lambda, \;\; z = \lambda$

• **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias, a no ser que } -b = 4 \;\rightarrow\; b = -4$$

— Si $a = 1$ y $b \neq -4$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 1$ y $b = -4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$ La primera y segunda filas son iguales.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ x - y + z = -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 4 - z \\ x - y = -4 - z \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2x = -2z \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 4 - z - x = 4 - z + z = 4 \end{cases}$$

Soluciones: $x = -\lambda$, $y = 4$, $z = \lambda$

- **Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$** $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado* para cualquier valor de b.

52 **S** **Discute en función de λ y μ:** $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} \lambda + 1 & 3 & \lambda \\ 3 & \lambda + 1 & 2 \\ \lambda & 2 & \lambda \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{array} \end{array}\right)$$

$$|A| = \lambda^2 - 4 = 0 \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- **Si $\lambda = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{array} \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \mu - 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mu + 4 = 0 \rightarrow \mu = 2$

— Si $\lambda = 2$ y $\mu = 2$ $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2$. *Compatible indeterminado*.

— Si $\lambda = 2$ y $\mu \neq 2$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. *Incompatible*.

- **Si $\lambda = -2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & \mu - 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

(las tres primeras columnas forman A)

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & \mu - 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\mu - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = -2$$

— Si $\lambda = -2$ y $\mu = -2$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. *Compatible indeterminado.*

— Si $\lambda = -2$ y $\mu \neq -2$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. *Incompatible.*

- **Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. *Compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de μ.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

53 Dada la matriz: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz (A_{ij}) formada por los adjuntos de los elementos de A.

b) Calcula $|A| = |a_{ij}|$ y $|A_{ij}|$ y halla una relación entre ellos.

a) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = |a_{ij}| = -13$

$|A_{ij}| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

54 En general, ¿qué relación existe entre el determinante de una matriz A, de orden 3×3, y el determinante de la matriz formada por sus adjuntos? Para demostrarlo, ten en cuenta que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y la expresión de A^{-1}.

- Sabemos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$|A_{ij}| = |A_{ji}|$.

- Por otra parte, tenemos que (suponemos que existe A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| = |A^{-1}|$$

- También sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \rightarrow \quad |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

• Uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \;\rightarrow\; |A_{ij}| = |A|^2 \;\; (A \text{ de orden } 3 \times 3)$$

55 **Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, da el valor de $|A_{ij}|$ en función de $|A|$.**

Con el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio anterior, llegamos a que si A es $n \times n$:

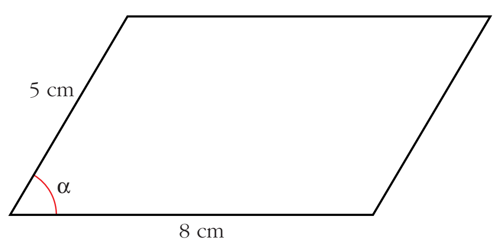
$$\left.\begin{aligned} |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|^n}\,|A_{ij}| \\ |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$

5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 130

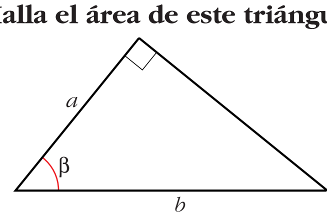
Problema 1

- **Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α:**



Área $= 8 \cdot 5\ sen\ \alpha = 40\ sen\ \alpha\ \text{cm}^2$

- **Halla el área de este triángulo en función del ángulo β:**



Área triángulo $= \dfrac{a\ b\ sen\ \beta}{2}\ \text{cm}^2$

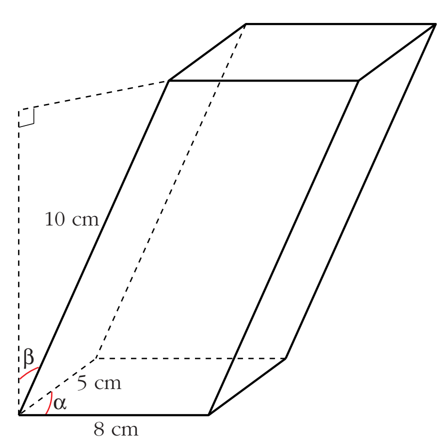
Página 131

Problema 2

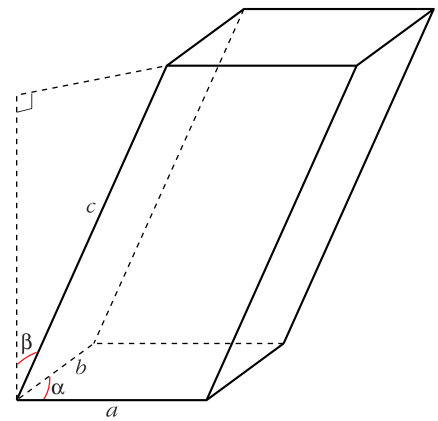
- **Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Área base} = 40\ sen\ \alpha \\ \text{Altura} = 10\ cos\ \beta\end{array}\right\}$$

Volumen $= 400\ sen\ \alpha\ cos\ \beta\ \text{cm}^3$



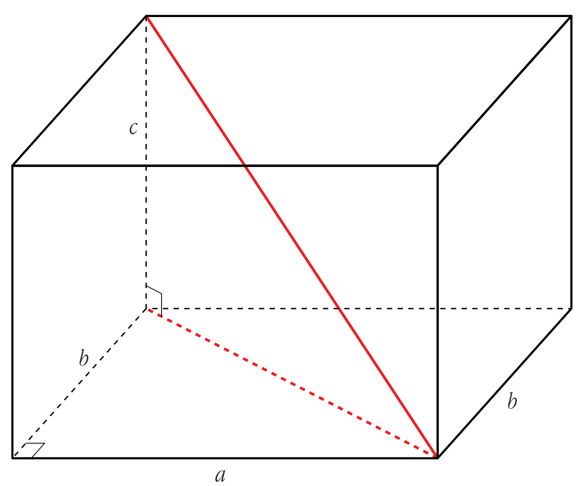
■ **¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas *a*, *b*, *c*, tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α, y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?**



Volumen = $a\,b\,c\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Problema 3

■ **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son: $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.**



Diagonal = $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$ =

= $\sqrt{169}$ = 13 cm

■ **Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas *a*, *b* y *c*.**

En general: Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Página 133

1. La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

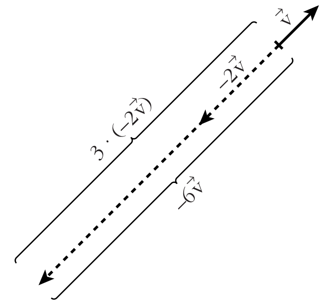
a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores: $b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

b) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array}\right\}\ 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$



2. La propiedad $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.

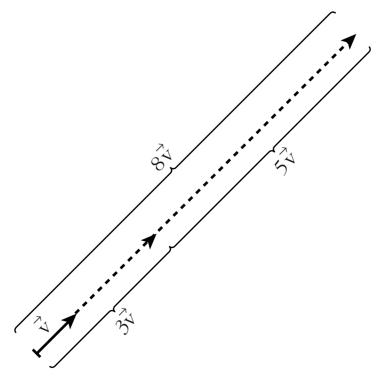
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $\left.\begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\}\ 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$



Página 135

1. Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:

a) $2\vec{u}$ b) $0\vec{v}$ c) $-\vec{u}$

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{u} - \vec{v}$ f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) -3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla: $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left.\begin{array}{r} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 139

1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) ¿Cuánto ha de valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 132°\ 1'\ 26''$

d) Proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

Proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí: $\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: $(0, -7, 2)$; $(-7, 0, 3)$; $(-2, 3, 0)$

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$$\vec{u}(5, -1, 2) \qquad\qquad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser (–2, 8, 9) o cualquier otro paralelo a él.

Página 142

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores: $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| =$$

$$= \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1\,013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,013}}{2} \approx 15{,}91 \text{ u}^2$$

Página 143

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \;\rightarrow\; \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Página 147

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array}\right\} \textit{Solución: } a = 2,\ b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \ \rightarrow\ (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array}\right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ Como } |A'| = 28 \neq 0, \text{ el sistema es } \textit{incompatible}.$$

Luego **no** es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $ran\ (A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?

$\vec{a}(1, -3, 2)$ $\vec{b}(2, 0, 1)$ $\vec{c}(-2, 6, -4)$ $\vec{d}(5, -15, 10)$ $\vec{e}(10, -30, 5)$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, pues sus coordenadas son proporcionales.

4 Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \ \rightarrow\ (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\} \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

5 **Halla, en cada caso, todos los valores de m, n y p tales que $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = \vec{0}$:**

a) $\vec{u}(3, 0, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 1)$

b) $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$, $\vec{w}(2, 0, 1)$

a) $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{rl} 3m + n + p &= 0 \\ -n &= 0 \\ m + p &= 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, la única solución del sistema es: $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$

(Luego $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes).

b) $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{rl} m + n + 2p &= 0 \\ -m + n &= 0 \\ n + p &= 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; luego $ran(A) = 2$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} -m + n &= 0 \\ n + p &= 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} m &= n \\ p &= -n \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones: } m = \lambda,\ n = \lambda,\ p = -\lambda$$

6 S **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}(1, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 3)$, $\vec{w}(1, 2, -1)$

b) $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 4, 11)$, $\vec{c}(1, 1, -1)$, $\vec{d}(0, 1, 4)$

c) $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$, $\vec{w}(5, 2, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Luego $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son **linealmente independientes**.

b) Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son **linealmente dependientes**.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son **linealmente dependientes.**

7 S **Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, k)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, k)$

a) $\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k + 2)^2 = 0 \quad \to \quad k = -2$

Si $k = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \quad \to \quad k = \dfrac{-5}{8}$

Si $k = \dfrac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

8 S **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?**

A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}

B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0,1)}

C = {(–3, 2, 1), (1, 2, –1), (1, 0, 1)}

A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}

Como (2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1), los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, **no** son una base.

B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)}

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego **no** son una base.

C = {(–3, 2, 1), (1, 2, –1), (1, 0, 1)}

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad \to$ Los vectores son linealmente independientes.

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$, linealmente independientes, son una **base** de $\mathbb{R}^3$.

9 S **¿Para qué valores de a el conjunto de vectores S = {(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)} es una base?**

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

10 **En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ d) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\rightarrow\; \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90°$

d) Proyeccción de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$

11 **Dados los vectores: $\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j} + k$ y $\vec{b} = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + m\,\vec{k}$, halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:**

a) Paralelos. b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1)$ $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \;\rightarrow\; m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{2}{5}$

12 **Halla la proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

13 **¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ **no** son ortogonales.

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}} \approx 0{,}089 \;\rightarrow\; \alpha = 84°\ 53'\ 20''$

14 **Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{5}{3}$

15 **Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.**

$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \;\rightarrow\; \vec{u}$ **no** es unitario.

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Producto vectorial

16 **Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.**

$\vec{u}(2, -1, 1)$ $\vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$

17 **Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.**

Área $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1\,133} \approx 33{,}66 \text{ u}^2$

18 **Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}\right)$

19 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2) \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$

El vector que buscamos será: $2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$

Producto mixto

20 **Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Página 148

21 S **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.**

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow$ Volumen $= 70$ u^3

22 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}(3, -1, 1)$, $\vec{b}(1, 7, 2)$ y $\vec{c}(2, 1, -4)$.**

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow$ Volumen $= 111$ u^3

23 S **Calcula el valor de m para que $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$

PARA RESOLVER

24 S **Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$, son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c. Por tanto, son linealmente independientes.

25 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (2, 5, -1) = 6 - 5 - 1 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (0, -1, -1) = 1 - 1 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

26 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ Área $= \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

27 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitarios y de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

a) $\left(\frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-4}{2\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

b) $\left(\frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}}\right)$ y $\left(\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}\right)$

28 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \;//\; (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

29 S **Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

30 S **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \quad \to \quad k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

31 **Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:**

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

32
S
a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 3, 15)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$ $\vec{u}_2(2, 4, 7)$ $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$(7, 3, 15) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 3 \\ 5a + 7b + 3c &= 15 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 15 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{84}{51} = \frac{28}{17}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 15 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 15 \end{vmatrix}}{51} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17}$$

Por tanto: $\vec{v} = \frac{28}{17}\vec{u}_1 + \frac{10}{17}\vec{u}_2 + \frac{15}{17}\vec{u}_3$

33 **S** **a) Comprueba que los vectores $\vec{b}_1 = 1/2(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$, $\vec{b}_2 = 1/2(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})$ y $\vec{b}_3 = \vec{k}$ son los de una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, siendo $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.**

b) Halla las coordenadas de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

a) $|\vec{b}_1| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = \dfrac{2}{2} = 1$

$|\vec{b}_2| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

$|\vec{b}_3| = 1$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$

$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$

Por tanto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) $(1, 1, 1) = x\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + \sqrt{3}y &= 2 \\ \sqrt{3}x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x + \sqrt{3}y &= 2 \\ 3x - \sqrt{3}y &= 2\sqrt{3} \\ \hline 4x \qquad &= 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$x = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ $\qquad y = \sqrt{3}x - 2 = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{2} - 2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

Por tanto:

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_2 + \vec{b}_3, \text{ es decir:}$$

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

34 **S** **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a - 1)(a + 2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

35 S **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1º) Es perpendicular a $\vec{u}$, es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2º) Es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{array}\right\} \text{ Sumando: } \begin{array}{l} 6z = -6y \ \rightarrow \ z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

36 S **Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la suma de los productos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + + \vec{a} \cdot \vec{c}$.**

Como $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \ \rightarrow \ |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 26 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$

Por tanto: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

37 S **Dados los vectores $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:**

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$. Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto: $\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

38 **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto S = {(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, –3), (–1, 1, 2)}.**

S

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \ \ ran\ (M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array}\right\} \text{ Debe tener solución: } \begin{array}{l} b = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \ \rightarrow\ x = \frac{-2}{2} = -1 \ \rightarrow\ x = -1 \end{array}$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

Página 149

39 S **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u².**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u², ha de ser:

$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$

es decir: $125x^2 = 625 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

40 S **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1º) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2º) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y \quad\ = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x \quad\ = -3y \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)\ (\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

41 S **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.**

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$
$$= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 16 + 4 + 8 = 28 \quad \to \quad |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Por otra parte:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$
$$= 16 + 4 - 8 = 12 \quad \to \quad |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

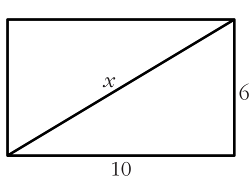
42 S **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.**

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Así:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} =$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \quad \to \quad |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 136 \quad \to \quad |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \quad \to \quad x^2 = 136 \quad \to \quad x = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

43 S **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a}+\vec{b}| = 7$.**

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$
$$= 34 + 30\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7^2 = 49$$

Por tanto: $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{49 - 34}{30} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

44 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} \qquad = 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{5}(7, 0, -1) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}(3, -5, 1) = \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$$

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{5} = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{35}{5}}$$

$$cos\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4/5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35/5}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}478 \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 61°\ 26'\ 21''$$

CUESTIONES TEÓRICAS

45 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

46 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad\qquad \vec{a} \perp \vec{c} \ \rightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

47 **Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.**

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ (pues $|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

48 **Demuestra que si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.**

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces, si hacemos una combinación lineal de ellos y la igualamos a cero, $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = \vec{0}$, necesariamente han de ser $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Veamos que sucede lo mismo con los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Consideramos una combinación lineal de ellos igualada a cero:

$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{w}) + z(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$, entonces:

$(x + y + z)\vec{u} + (x - z)\vec{v} + (-y + z)\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x \quad - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Pero} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

luego la única solución del sistema es la solución trivial $x = y = z = 0$.

Por tanto, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

49 **Justifica que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector nulo es L.D.**

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{0}\}$ un conjunto de $n + 1$ vectores que contiene el vector nulo. Si hacemos una combinación lineal de estos vectores e igualamos a cero:

(*) $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n + x_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$

tenemos infinitas soluciones para $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$; pues todas las soluciones de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, 0, \dots, 0, \lambda)$ satisfacen la igualdad (*).

Por tanto, son linealmente dependientes.

50 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=1\cdot 2\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=2\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=-3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=-\dfrac{3}{2}>1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}|\,|\vec{v}|=|\vec{u}\cdot\vec{v}| \;\rightarrow\; |\vec{u}|\,|\vec{v}|=\begin{cases}+\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\\ -\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases}|\vec{u}|\,|\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=1 \rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}})=0°\\ |\vec{u}|\,|\vec{v}|=-|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=-1 \rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}})=180°\end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

51 **Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

52 **Si $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ siendo $\vec{u}\neq\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$, ¿cómo son entre sí los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Sabemos que $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Si $|\vec{u}\times\vec{v}|=0$, $|\vec{u}|\neq 0$ y $|\vec{v}|\neq 0$, entonces ha de ser $\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=0$. Es decir, $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ será 0° ó 180°.

Por tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección.

53 **Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, ¿es $\vec{b}=\vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.**

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\\ \vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\end{array}\right\} \rightarrow\; \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}, \text{ pero } \vec{b}\neq\vec{c}.$$

54 **Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:**
S

$$[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}-\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}],\quad [\vec{a}+\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}],\quad [\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c},\ \vec{c}-\vec{a}]$$

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$, forman una base. Así, las coordenadas respecto a esta base de los vectores $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{c}$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ son: (1, 0, 1), (1, 0, –1) y (1, 1, 1), respectivamente.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Son linealmente independientes $\rightarrow$

$\rightarrow [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] \neq 0$

Análogamente:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}] \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow [\vec{a} - \vec{c},\ \vec{b} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{a}] = 0$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

55 Las tres alturas, AH_A BH_B CH_C de un triángulo ABC se cortan en un punto.

Hay una bonita forma de demostrarlo por geometría elemental.

El triángulo $A'B'C'$ está formado con los lados paralelos a los de ABC. Los vértices de este son los puntos medios de aquel. Por tanto, AH_A, BH_B y CH_C son las mediatrices de los lados de $A'B'C'$.

Organiza y completa el razonamiento anterior para concluir que AH_A, BH_B, CH_C se cortan en un punto.

Sea P el punto de corte de AH_A y BH_B. Entonces:

1) Como AH_A es la mediatriz del lado $B'C'$, P está a igual distancia de B' que de C'.

2) Como BH_B es la mediatriz del lado $A'C'$, entonces P está a igual distancia de A' que de C'.

Por tanto, uniendo 1) y 2), tenemos que P está a igual distancia de A' que de B'; es decir, P también pertenece a la mediatriz del lado $A'B'$, esto es, a CH_C.

Luego hemos probado que las tres se cortan en el mismo punto.

56 La propiedad anterior puede demostrarse, también, mediante vectores. Llamamos H al punto en que se cortan AH_A y BH_B.

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De las igualdades anteriores se llega a: $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$ y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H. (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$$\vec{BC} \perp \vec{AH_A} \rightarrow \vec{BC} \perp \vec{HA} \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

b) $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \overset{(1)}{=}$

$$= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \overset{(2)}{=} 0$$

(1) $\vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$

(2) $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

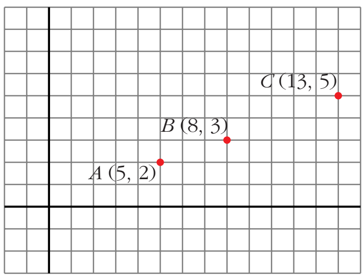
Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp \vec{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.

6 PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Página 150

Puntos alineados en el plano

- **Comprueba que los puntos *A*(5, 2), *B*(8, 3) y *C*(13, 5) no están alineados.**



$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$

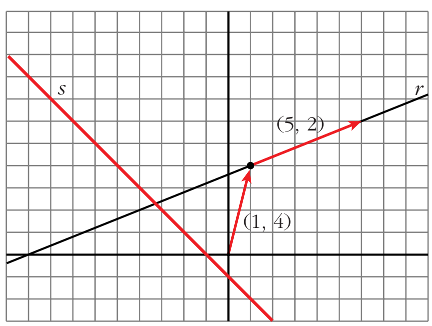
No tienen las coordenadas proporcionales; luego no están alineados.

Página 151

Rectas en el plano

- **Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que aparece a continación, toma el vector $\vec{p}(1, 4)$ para situarte en ella y el vector $\vec{d}(5, 2)$ para deslizarte por ella.**

  Halla también su ecuación implícita.



Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{array}{l} -2x = -2 - 10\lambda \\ \;\;\,5y = 20 + 10\lambda \\ \hline -2x + 5y = 18 \end{array} \quad \to \quad 2x - 5y + 18 = 0$$

■ **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta *s*.**

La recta s pasa por el punto (–1, 0) y tiene la dirección del vector $\vec{d}(1, -1)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$

Ecuación implícita:

Sumando las dos anteriores: $x + y = -1 \quad \to \quad x + y + 1 = 0$

Página 152

1. Representa los puntos siguientes:
***P*(5, 2, 3), *Q*(3, –2, 5), *R*(1, 4, 0), *S*(0, 0, 4) y *T*(0, 6, 3).**

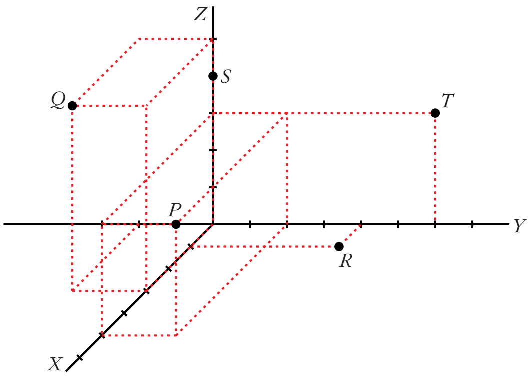
$P(5, 2, 3)$

$Q(3, -2, 5)$

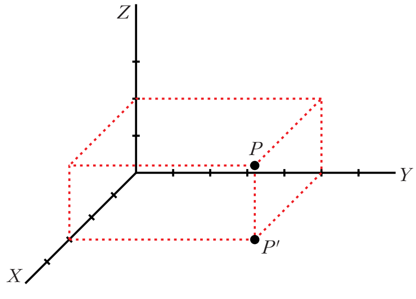
$R(1, 4, 0)$

$S(0, 0, 4)$

$T(0, 6, 3)$



2. Sitúa sobre unos ejes coordenados un punto *P*. Proyéctalo, *P'*, sobre el plano *XY*. Sigue el proceso hasta determinar las coordenadas de *P*. (Observa que el único paso arbitrario es decidir la situación de *P'*).



$P(3, 5, 2)$

Página 154

1. Dados los puntos $A(1, 7, 3)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(3, -4, 11)$ y $D(1, 0, -5)$:

a) Halla las coordenadas de los vectores: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{AC}$

b) Halla el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos: AB, BC, CD, AC, AD

a) $\vec{AB} = (-2, -4, -3)$ $\quad \vec{BC} = (4, -7, 11)$ $\quad \vec{CD} = (-2, 4, -16)$

$\vec{DA} = (0, 7, 8)$ $\quad \vec{AC} = (2, -11, 8)$

b) $M_{AB} = \left(0, 5, \frac{3}{2}\right)$ $\quad M_{BC} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ $\quad M_{CD} = (2, -2, 3)$

$M_{AC} = \left(2, \frac{3}{2}, 7\right)$ $\quad M_{AD} = \left(1, \frac{7}{2}, -1\right)$

2. Obtén las coordenadas del punto medio de los segmentos:

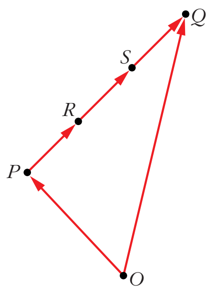
a) de extremos $(3, -5, 1)$ y $(-3, 1, 13)$.

b) de extremos $(-5, 1, 7)$ y $(4, 2, 0)$.

a) $\left(\frac{3-3}{2}, \frac{-5+1}{2}, \frac{1+13}{2}\right) = (0, -2, 7)$

b) $\left(\frac{-5+4}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{7+0}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

3. Obtén las coordenadas de los puntos que dividen cada uno de los segmentos del ejercicio anterior en tres partes iguales.



Dado un segmento de extremos P y Q:

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \frac{1}{3}\vec{PQ} = \vec{OP} + \frac{1}{3}(\vec{OQ} - \vec{OP}) = \vec{OP} + \frac{1}{3}\vec{OQ} - \frac{1}{3}\vec{OP} = \frac{\vec{OQ} + 2\vec{OP}}{3}$$

$$\vec{OS} = \vec{OP} + \frac{2}{3}\vec{PQ} = \frac{2\vec{OQ} + \vec{OP}}{3}$$

Según esto, los puntos que buscamos son:

a) $\dfrac{(-3, 1, 13) + 2(3, -5, 1)}{3} = (1, -3, 5)$

$\dfrac{2(-3, 1, 13) + (3, -5, 1)}{3} = (-1, -1, 9)$

b) $\dfrac{(4, 2, 0) + 2(-5, 1, 7)}{3} = \left(-2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

$\dfrac{2(4, 2, 0) + (-5, 1, 7)}{3} = \left(1, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

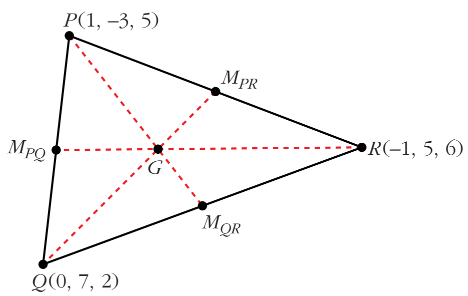
4. ***P*(1, –3, 5), *Q*(0, 7, 2) y *R*(–1, 5, 6) son los vértices de un triángulo.**

a) Calcula las coordenadas del punto medio de cada lado.

b) Recuerda que el baricentro (punto donde se cortan las medianas del triángulo) está sobre cada mediana, a $\frac{2}{3}$ del vértice y a $\frac{1}{3}$ del punto medio del lado opuesto.

Calcula el baricentro del triángulo anterior a partir de uno de los vértices. Repítelo para los otros dos y obtendrás el mismo resultado.

a)



$M_{PQ} = \left(\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{7}{2}\right)$

$M_{QR} = \left(-\dfrac{1}{2}, 6, 4\right)$

$M_{PR} = \left(0, 1, \dfrac{11}{2}\right)$

b) A partir de P: (ver ejercicio 3)

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\overrightarrow{OM}_{QR} + \overrightarrow{OP}}{3} = \dfrac{(-1, 12, 8) + (1, -3, 5)}{3} = \left(0, 3, \dfrac{13}{3}\right)$

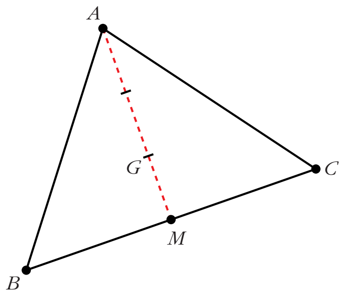
A partir de Q:

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\overrightarrow{OM}_{PR} + \overrightarrow{OQ}}{3} = \dfrac{(0, 2, 11) + (0, 7, 2)}{3} = \left(0, 3, \dfrac{13}{3}\right)$

A partir de R:

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\overrightarrow{OM}_{PQ} + \overrightarrow{OR}}{3} = \dfrac{(1, 4, 7) + (-1, 5, 6)}{3} = \left(0, 3, \dfrac{13}{3}\right)$

5. **Localiza el baricentro del triángulo de vértices $A(2, -1, 3)$, $B(0, 4, 1)$, $C(1, 1, 0)$.**



Hallamos el punto medio, M, del lado BC:

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El baricentro, G, está sobre la mediana, a $\frac{2}{3}$ de A y a $\frac{1}{3}$ de M (ver ejercicio 3):

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}}{3} = \frac{(1, 5, 1) + (2, -1, 3)}{3} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Página 155

1. **Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:**

a) $A(2, 0, 5)$ **y** $B(-1, 4, 6)$ **b)** $M(5, 1, 7)$ **y** $N(9, -3, -1)$

c) $P(1, 0, -3)$ **y** $Q(1, 4, -3)$ **d)** $R(0, 2, 3)$ **y** $S(0, 2, 1)$

a) Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

b) Vector dirección: $\overrightarrow{MN} = (4, -4, -8) \,//\, (1, -1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$

c) Vector dirección: $\overrightarrow{PQ} = (0, 4, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$

d) Vector dirección: $\overrightarrow{RS} = (0, 0, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Página 157

2. Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: (–5, 3, 7) y (2, –3, 3)

Vector dirección: (2, –3, 3) – (–5, 3, 7) = (7, –6, –4)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{-6} \;\to\; -6x + 12 = 7y + 21 \\ \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{z-3}{-4} \;\to\; -4x + 8 = 7z - 21 \end{array}\right\} \to \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

3. Localiza seis puntos, además de los dados, de la recta anterior.

Dándole valores a λ, obtenemos:

$\lambda = 1 \to (9, 9, -1)$

$\lambda = 2 \to (16, -15, -5)$

$\lambda = 3 \to (23, -21, -9)$

$\lambda = 4 \to (30, -27, -13)$

$\lambda = -2 \to (-12, 9, 11)$

$\lambda = -3 \to (-19, 15, 15)$

(Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$, obtenemos los puntos que teníamos).

4. Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta dada *r*:

***A*(5, 0, 0)** ***B*(3, 3, 4)** ***C*(15, –15, 4)** ***D*(1, 6, 0)**

$$r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

$A \notin r$, pues $z \neq 4$

$$B: \left\{\begin{array}{l} 5 - 2\lambda = 3 \to \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \to \lambda = 1 \\ 4 = 4 \end{array}\right\} B \in r$$

$$C: \left\{\begin{array}{l} 5 - 2\lambda = 15 \to \lambda = -5 \\ 3\lambda = -15 \to \lambda = -5 \\ 4 = 4 \end{array}\right\} C \in r$$

$D \notin r$, pues $z \neq 4$

Página 161

1. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 - 6\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) $P = (1, 2, -5)$ $\vec{d_1} = (-5, 3, 1)$

$Q = (1, 1, 0)$ $\vec{d_2} = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 5)$

$$M' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\Bigg); \quad |M'| = -5 \ \rightarrow \ ran\ (M') = 3 \ \rightarrow \ \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $P = (3, 1, 5)$ $\vec{d_1} = (2, -1, 0)$

$Q = (-1, 3, 5)$ $\vec{d_2} = (-6, 3, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-4, 2, 0)$

$$M' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\Bigg); \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 1 \ \rightarrow \ \text{Las dos rectas coinciden.}$$

2. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$

a) $P = (0, 0, 0)$ $\vec{d_1} = (1, 1, 0)$

$Q = (3, 3, 0)$ $\vec{d_2} = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 3, 0)$

$$M' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\Bigg); \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \ \rightarrow \ \text{Las rectas se cortan.}$$

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \\ 0 = \mu \end{matrix}\right\} \text{ Se cortan en el punto } (3, 3, 0).$$

b) $P = (3, -2, 1)$ $\qquad \vec{d_1} = (1, -1, 0)$

$Q = (0, 3, -1)$ $\qquad \vec{d_2} = (-2, 2, 0)$

$\vec{PQ} = (-3, 5, -2)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{matrix}\right); \quad ran\,(M) = 1; \quad ran\,(M') = 2 \quad \to \quad \text{Las rectas son paralelas.}$$

Página 163

1. a) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.

b) Halla otros tres puntos del plano.

c) Calcula n para que $A(1, n, 5)$ pertenezca al plano.

a) El plano es paralelo a $\vec{PQ} = (3, -2, 2)$ y a $\vec{QR} = (2, -2, 8) \parallel (1, -1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$

Ecuación implícita:

Un vector normal al plano es: $(3, -2, 2) \times (1, -1, 4) = (-6, -10, -1) \parallel (6, 10, 1)$

La ecuación es: $6(x - 4) + 10(y - 5) + 1(z - 0) = 0$, es decir: $6x + 10y + z - 74 = 0$

b) $\left(\frac{37}{3}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{37}{5}, 0\right)$; $(0, 0, 74)$

c) Sustituimos en la ecuación: $6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \quad \to \quad 6 + 10n + 5 - 74 = 0$

$10n = 63 \quad \to \quad n = \frac{63}{10}$

Página 165

1. Estudia la posición relativa del plano y de la recta:

$$\pi: 2x - y + 3z = 8 \qquad r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de r y π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$

$4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \quad \to \quad 0\lambda = 3 \quad \to$ No tiene solución.

La recta y el plano **son paralelos**, pues no tienen ningún punto en común.

2. **Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:**

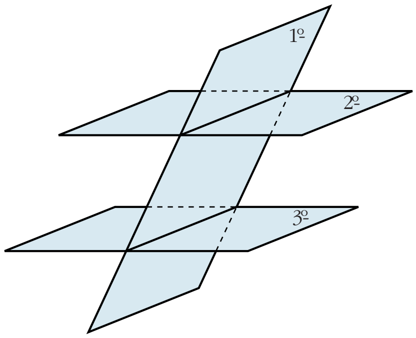
$$\boldsymbol{2x - y + 3z = 8 \qquad x + 3y - z = 5 \qquad 2x + 6y - 2z = 5}$$

¿Tienen los tres planos algún punto común?

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$ Se cortan en una recta.

$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 5 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Son paralelos.

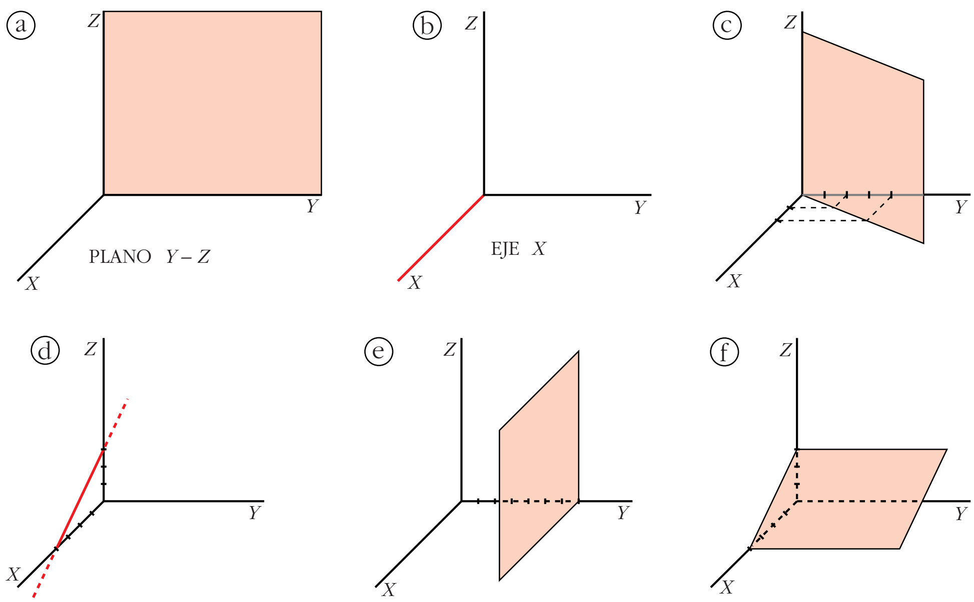
$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Se cortan en una recta.



No hay ningún punto común a los tres planos.

Página 167

1. **Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de las siguientes figuras:**



a) x siempre vale 0.

y puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

$$\pi: \ x = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

b) x puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 0.

z siempre vale 0.

$$\text{Eje } X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \to \quad \text{Eje } X: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) z puede tomar cualquier valor.

El plano π en su intersección con el plano XY determina la recta r de ecuación:

r: $x - y = 0$

Así, en el espacio XYZ:

$$\pi: x - y = 0 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

d) Calculamos la ecuación de la recta en el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$ $\to$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = \quad\;\; 3\lambda \end{cases} \quad \to \quad \lambda = \frac{z}{3}$$

$$x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

En el espacio XYZ la recta no toma valores en y, por tanto, $y = 0$. Luego la ecuación de la recta r en el espacio XYZ es:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \quad \to \quad r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 7.

$$\pi: y = 7 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y puede tener cualquier valor.

Calculamos la recta que determina el plano π en su intersección con el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

Por el apartado d):

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

Así:

$$\pi: 3x + 4z = 12 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

2. **Representa las figuras dadas por las siguientes ecuaciones:**

a) $z = 4$ **b)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

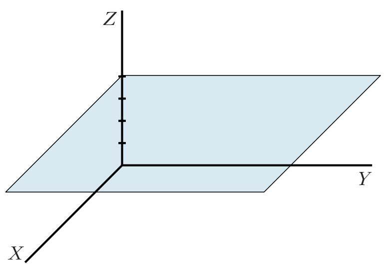
e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **g)** $y = 0$ **h)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \rho \end{cases}$ **k)** $x + y + z = 1$ **l)** $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

¡Atención! Una de ellas representa un punto y otra, todo el espacio. Hay una que tiene dos parámetros, pero actúan como si solo hubiera uno.

a) $z = 4 \;\to\;$ z siempre vale 4.

x e y pueden tomar cualquier valor.



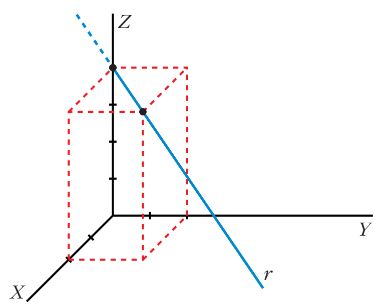
b) $\begin{cases} x = \lambda & \to & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \to & y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = 4 & \to & z \text{ siempre vale 4.} \end{cases}$

Es el mismo plano que el del apartado anterior.

c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ x e y siempre toman el mismo valor.

$z = 4 \;\to\;$ z siempre vale 4.

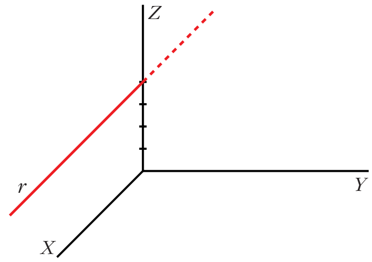
Como solo hay un parámetro, es una recta (paralela al plano XY).



d) $\begin{cases} x = \lambda & \to \quad x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = 0 & \to \quad y \text{ siempre vale } 0. \\ z = 4 & \to \quad z \text{ siempre vale } 4. \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.

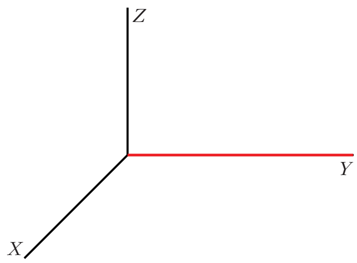
Como $y = 0$ siempre, es una recta del plano XZ.



e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ Es la ecuación implícita de la recta anterior.

f) $\begin{cases} x = 0 & \to \quad x \text{ siempre vale } 0. \\ z = 0 & \to \quad z \text{ siempre vale } 0. \\ & \quad\;\; y \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Es la ecuación del eje Y.

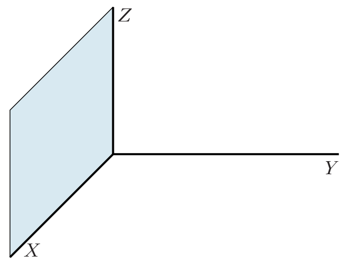


g) $y = 0 \quad \to \quad y$ siempre vale 0.

x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

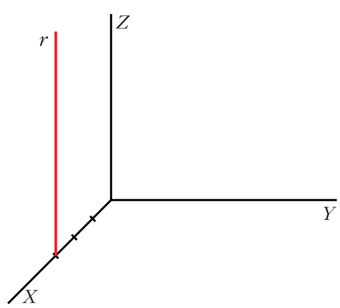
Es la ecuación del plano XZ.



h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \quad \to \quad$ si hacemos $\lambda + \mu = \rho, \;\; \rho \in \mathbb{R},$ tenemos:

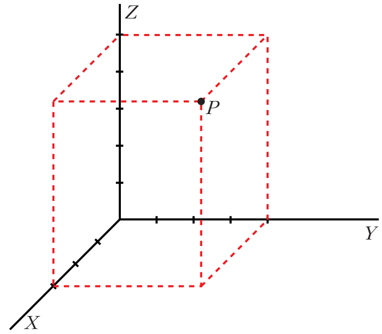
$\begin{cases} x = 3 & \to \quad x \text{ siempre vale } 3. \\ y = 0 & \to \quad y \text{ siempre vale } 0. \quad \to \quad \text{Nos movemos en el plano } XZ. \\ z = \rho & \to \quad z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.



i) $\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ siempre vale } 3. \\ y = 4 & \rightarrow \quad y \text{ siempre vale } 4. \\ z = 5 & \rightarrow \quad z \text{ siempre vale } 5. \end{cases}$

Es un punto.



j) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow \quad x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \rightarrow \quad y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = \rho & \rightarrow \quad z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Representa todo el espacio.

k) $x + y + z = 1$

Calculamos las intersecciones con los ejes:

Eje X:

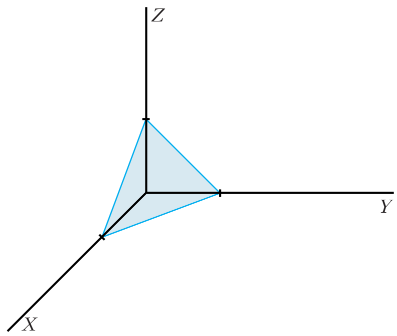
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad (1, 0, 0)$$

Eje Y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 1, 0)$$

Eje Z:

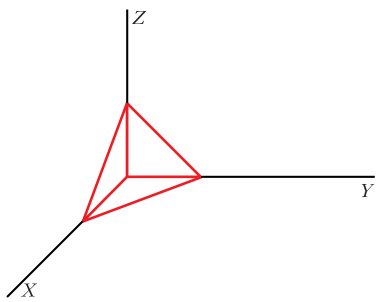
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad z = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 0, 1)$$



l) $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

$x + y + z \le 1 \rightarrow$ Describe la región limitada por el plano anterior, cuyas coordenadas están por debajo de él.

$x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$: Las tres variables tienen que ser positivas.



Representa la región comprendida entre la parte positiva de los planos XY, YZ, XZ y el plano $x + y + z = 1$.

Página 173

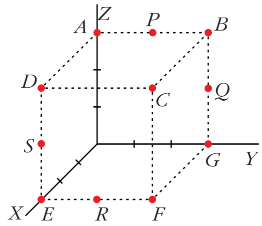
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Puntos

1 **Las coordenadas de los puntos representados en esta figura son:**

(0, 0, 3); (0, 3, 3); (3, 3, 3); (3, 0, 3); (3, 0, 0); (3, 3, 0); (0, 3, 0); (0, 3/2, 3); (0, 3, 3/2); (3, 3/2, 0); (3, 0, 3/2)



Asocia a cada punto sus coordenadas.

$A(0, 0, 3)$; $B(0, 3, 3)$; $C(3, 3, 3)$; $D(3, 0, 3)$; $E(3, 0, 0,)$; $F(3, 3, 0)$; $G(0, 3, 0)$; $P(0, 3/2, 3)$; $Q(0, 3, 3/2)$; $R(3, 3/2, 0)$; $S(3, 0, 3/2)$

2 **Comprueba si los puntos $A(1, -2, 1)$, $B(2, 3, 0)$ y $C(-1, 0, -4)$ están alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(1, 5, -1)\\ \overrightarrow{AC}(-2, 2, -5)\end{array}\right\}$$ Sus coordenadas no son proporcionales. Luego los puntos **no** están alineados.

3 **Halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, siendo $A(2, 0, 1)$ y $B(5, 3, -2)$.**

- Si $Q(x, y, z)$, entonces $\overrightarrow{AQ}(x-2, y, z-1)$:

$$\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{5}\right) = (x-2, y, z-1)$$

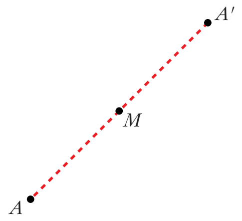
$$\left.\begin{array}{l} x-2 = \frac{9}{5} \;\rightarrow\; x = \frac{19}{5} \\[2ex] y = \frac{9}{5} \\[2ex] z-1 = -\frac{9}{5} \;\rightarrow\; z = \frac{-4}{5} \end{array}\right\} Q\left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

- Si $P(a, b, c)$, entonces $\overrightarrow{AP}(a-2, b, c-1)$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-6}{5}\right) = (a-2, b, c-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2 = \frac{6}{5} \;\rightarrow\; a = \frac{16}{5} \\[2ex] b = \frac{6}{5} \\[2ex] c-1 = \frac{-6}{5} \;\rightarrow\; c = \frac{-1}{5} \end{array}\right\} P\left(\frac{16}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

4 **Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.**



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M.

Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \rightarrow x = 4; \quad \frac{y+3}{2} = -1 \rightarrow y = -5; \quad \frac{z}{2} = 2 \rightarrow z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

5 **Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1)\\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1)\end{array}\right\} \text{ Para que estén alineados ha de ser: } \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \rightarrow a - 2 = -3 \rightarrow a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{-3}{2} - 1 \rightarrow b = \frac{-5}{2}$$

Rectas

6 **Halla las ecuaciones paramétricas de los ejes de coordenadas.**

Eje $OX \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

7 **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2, 1)$ y $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.**

Un vector dirección de la recta r es $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$.

Tomamos el vector $\vec{d}(1, -1, -2) \,//\, \overrightarrow{AB}$.

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-3, 2, 1) + \lambda(1, -1, -2)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} \;\to\; -x-3 = y-2 \;\to\; x+y+1=0 \\ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{z-1}{-2} \;\to\; -2x-6 = z-1 \;\to\; 2x+z+5=0 \end{array}\right\}$$

8 **Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\,(-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{AC}\,(3, -6, 1) \end{array}\right\}$$ Las coordenadas no son proporcionales, luego los puntos **no** están alineados.

9 S **Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ.**

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

• *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 \;\to\; x+4=0 \\ y = 2 \;\to\; y-2=0 \end{array}\right\}$$

10 S **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, 0, 0)$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 2)\, //\, (0, 2, 1)$

• *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 1 & & & \rightarrow & x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} & \rightarrow & y + 3 = 2z & \rightarrow & y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

11 **S** **Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:**

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\quad$ $s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $\quad$ $s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$ $\quad$ $s: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\quad$ $s: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 5, 1)$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ \underbrace{4 \quad 3}_{M} & & 1 \end{array}\right) \rightarrow |M'| = -51 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $\vec{d}_r(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(3, 3, 3)$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ \underbrace{1 \quad 2}_{M} & & 3 \end{array}\right) \rightarrow |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1ª y la 3ª: } 3 = 9 + 6\mu \ \to \ \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \ \to \ \lambda = 1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: (0, 3, 3).

c) $\vec{d}_r(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

d) $$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(2, 3, 4) \\ \vec{d}_s(4, 6, 8) \end{array}\right\} \text{Tienen la misma dirección.}$$

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 4\lambda = 1 \ \to \ \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 \ \to \ \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 \ \to \ \lambda = -1/2 \end{array}\right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

12 **S** **Obtén el valor de *a* para el cual las rectas *r* y *s* se cortan, y halla el punto de corte:**

$$r: x = y = z - a \qquad s: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0}$$

En s, divide por 2 el numerador y el denominador de la primera fracción.

r: $x = y = z - a \ \to \ \vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(0, 0, a)$

$$s: \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0} \ \to \ \vec{d}_s\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right); \ P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$PP'\left(\frac{1}{2}, -3, 2 - a\right)$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 1/2 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 - a \end{array}\right) \ \to \ ran\ (M) = 2$$

(M = the first two columns)

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran(M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a - 21}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 = -3 - 2\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

13 S **Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:**

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{array}\right\} \text{ Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 12, \quad n = -3$$

(El punto $P(0, 1, -3) \in s$; pero $P \notin r$; luego las dos rectas son paralelas si $m = 12$ y $n = -3$).

14 **a) Halla el vector director de la recta determinada por los planos:**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

a) $\vec{d} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Obtenemos un punto de la recta haciendo $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\} \text{ El punto } (0, 0, 2) \text{ pertenece a la recta.}$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

15 **Dada la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$, exprésala como intersección de dos planos.**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = z \;\rightarrow\; x = 2z \;\rightarrow\; x - 2z = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} \;\rightarrow\; -x = 2y + 2 \;\rightarrow\; x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Página 174

Planos

16 **S** **Halla las ecuaciones de los siguientes planos:**

a) Determinado por el punto $A(1, -3, 2)$ y por los vectores $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 0, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

c) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1, 0, 1).

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 3) = (3, -6, 1)$

$3(x - 1) - 6(y + 3) + (z - 2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x - 2) - 3(y + 3) - 4(z - 1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}(2, -1, 3)$

$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

17 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos *OXY*, *OYZ*, *OXZ*.**

Plano *OXY*:

Paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array}\right.$ Implícita: $z = 0$

Plano *OYZ*:

Paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right.$ Implícita: $x = 0$

Plano OXZ:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $y = 0$

18 **Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos:**

a) $z = 3$ **b)** $x = -1$ **c)** $y = 2$

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \mu \end{cases}$

19 **¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$?**

Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$.

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

20 S **Calcula m y n para que los planos α: $mx + y - 3z - 1 = 0$ y β: $2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?**

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\}$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 6, \quad n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 & \rightarrow \quad 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0 & \rightarrow \quad 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

21 S **Escribe la ecuación del plano que pase por los puntos (0, 0, 0), (2, 2, 0) y (1, 1, 2).**

$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, -1, 0)$

$P(0, 0, 0)$

El plano es: $x - y = 0$

22 **S** **Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta:**

$$x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$$

Si contiene a la recta, contendrá al punto $Q(2, 3, 4)$ y será paralelo a $\vec{d}(1, -1, -3)$.

También será paralelo a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -1, -3) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$

La ecuación del plano es: $2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$

$$2x - y + z - 5 = 0$$

23 **S** **Comprueba que las rectas:**

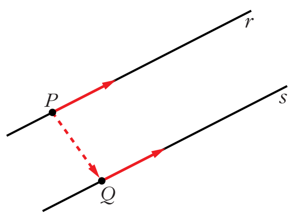
$$r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2 \qquad s: \begin{cases} x - \ 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

son paralelas, y halla la ecuación del plano que las contiene.

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, 2)$

$\vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (1, -2, 0) = (-4, -2, -2) \,//\, (2, 1, 1)$

Las rectas r y s tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, 2) \in r$, pero $P \notin s$. Luego las rectas son paralelas.



Obtenemos un punto, Q, de s haciendo $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2z = 5 \\ x = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ z = \ \ 3 \end{array}\right\} Q(11, 0, 3)$$

El plano que buscamos será paralelo a $\vec{d}_r(2, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{PQ}(10, 0, 1)$. Un vector normal es: $(2, 1, 1) \times (10, 0, 1) = (1, 8, -10)$

La ecuación del plano será: $1 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (y - 0) - 10 \cdot (z - 2) = 0$

$$x + 8y - 10z + 19 = 0$$

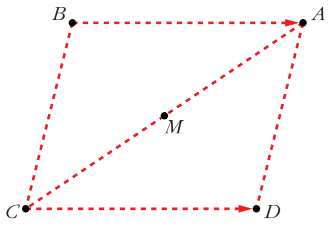
24 **S** **¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(-1, 2, 1)$?**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Los puntos *no* son coplanarios.

PARA RESOLVER

25 **Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el vértice D y el centro del paralelogramo.**



Sea $D(x, y, z)$ el otro vértice:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, 3, -3) = (x - 4, y + 1, z + 3)$

$$\left.\begin{cases} x - 4 = -1 \rightarrow x = 3 \\ y + 1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ z + 3 = -3 \rightarrow z = -6 \end{cases}\right\} D(3, 2, -6)$$

Si M es el centro del paralelogramo, es el punto medio de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$$

26 **S** **Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$\vec{d}_r(2, -3, 2)$; $P(1, -5, -1)$

$\vec{d}_s(4, -1, 2)$; $P'(0, b, 1)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, b + 5, 2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $|M'| = 0$ (para que $ran\ (M) = ran\ (M') = 2$).

M es la matriz formada por las dos primeras columnas.

$|M'| = 4b + 44 = 0 \rightarrow b = -11$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2\lambda = 4\mu \\ -5 - 3\lambda = -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\mu \end{array}\right\}$$ Restando la 3ª ecuación a la 1ª: $2 = -1 + 2\mu$

$$\mu = \frac{3}{2} \qquad \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{2}$ en las ecuaciones de r (o $\mu = \frac{3}{2}$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$.

27 **S** **Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla el plano que las contiene.

$\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(0, a, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PP'}(1, 1 - a, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser $|M'| = 0$.

$|M'| = a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x-1) - 1(y-1) - 2(z+1) = 0$

$$x - y - 2z - 2 = 0$$

28 **S** **¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s?**

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z + 1 \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, -1)$

$\vec{d}_s(2, 1, 1)$

Las dos rectas tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, -1) \in r$, pero $P \notin s$

puesto que: $\begin{cases} 2\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 1/2 \\ -1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Por tanto, las rectas son paralelas. Luego *no* se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s.

29 **S** **Estudia la posición relativa de la recta: $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$.**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$\pi: x - y + z - 3 = 0$

$$(3 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) + (-\lambda) - 3 = 0$$

$$3 + 2\lambda + 1 - \lambda - \lambda - 3 = 0$$

$$1 = 0$$

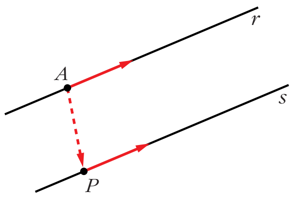
La recta es *paralela* al plano (pues no tienen ningún punto en común).

30 S **Dadas la recta r determinada por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$, y la recta:**

$$s: \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d_r} = \vec{AB} = (2, 0, 1);\ A(1, 1, 1) \\ \vec{d_s} = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1);\ A \notin s \end{array}\right\} \text{Las rectas son paralelas.}$$



Obtenemos un punto de s haciendo $z = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} P(1, 2, 0)$$

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d_r}$ y a $\vec{AP}(0, 1, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = \vec{d_r} \times \vec{AP} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2)$

El plano es: $-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$

$$-x + 2y + 2z - 3 = 0$$

31 S **Dada la recta r:** $\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$

a) Halla, para cada valor de a, las ecuaciones paramétricas de r_a.

b) Discute la existencia de valores de a para que la recta r_a esté incluida en el plano $x + y + z = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + z = 1 - ay \\ 2x - 2z = 6 - 6y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x + z = 1 - ay \\ x - z = 3 - 3y \end{array}\right\}$ Sumando: $4x = 4 - (a + 3)y$

$$x = 1 - \frac{a + 3}{4}y$$

$$z = x - 3 + 3y = 1 - \frac{a + 3}{4}y - 3 + 3y = -2 + \frac{9 - a}{4}y$$

$$r_a: \begin{cases} x = 1 - (a + 3)\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 + (9 - a)\lambda \end{cases}$$

b) $x + y + z = 1$

$1 - (a + 3)\lambda + 4\lambda - 2 + (9 - a)\lambda = 1$

$1 - a\lambda - 3\lambda + 4\lambda - 2 + 9\lambda - a\lambda = 1$

$(10 - 2a)\lambda = 2$

$10 - 2a = 0 \ \rightarrow \ 10 = 2a \ \rightarrow \ a = 5$

- Si $a = 5 \ \rightarrow$ La recta es paralela al plano.
- Si $a \neq 5 \ \rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.

Por tanto, no existen valores de a para los que la recta esté contenida en el plano.

Página 175

32 S **Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta** $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$

El plano será paralelo a $\vec{AB}(-3, 2, -2)$ y a $\vec{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \ \rightarrow \ \vec{n}(4, 7, 1)$

El plano es: $4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

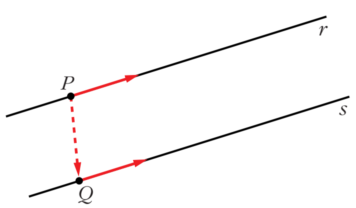
33 S **Estudia la posición de las siguientes rectas y halla, si es posible, el plano que las contiene:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \qquad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$$

$\vec{d}_r(1, -1, 2)$; $P(2, 1, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 1, -2)$

Las rectas tienen la misma dirección. Además $P(2, 1, 0) \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas son paralelas.



Un punto de s es $Q(1, 1, -2)$.

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{PQ}(-1, 0, -2)$.

Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (1, -1, 2) \times (-1, 0, -2) = (2, 0, -1)$

El plano es: $2(x - 2) + 0(y - 1) - 1(z - 0) = 0$

$2x - z - 4 = 0$

34 **S** **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta**

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \textbf{y es paralelo a:} \quad s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r(3, -1, 1)$ y a $\vec{d}_s(5, 2, -3)$.

Un vector normal al plano será: $\vec{n} = (3, -1, 1) \times (5, 2, -3) = (1, 14, 11)$

Un punto del plano es $(2, -1, 0)$.

Por tanto, el plano es: $1(x-2) + 14(y+1) + 11(z-0) = 0$

$$x + 14y + 11z + 12 = 0$$

35 **S** **Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?**

Hallamos la ecuación del plano que contiene a B, C y D.

El plano será paralelo a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, es decir, a $(1, 1, 1)$ y a $(3, 0, -1)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, -4, 3)$$

La ecuación del plano es: $1(x-0) - 4(y-1) + 3(z-2) = 0$

$$x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que A pertenezca al mismo plano, ha de ser:

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1$$

36 **S** **Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.**

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

37 **S** **Estudia la posición de los siguientes planos:**

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - \;\; z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + \;\; y + \;\; z = 2 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

$|M| = 8 \quad \to \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 3 \quad \to$ Los tres planos se cortan en un punto.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

La 3ª columna es $-1 \cdot$ 2ª; y la 4ª columna se obtiene sumando la 1ª y la 3ª.

Luego $ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \quad \to$ Los tres planos se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x - \;\; y + \;\; z = 1 \\ 3x + \;\; y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;$ y $\; |M| = 0 \quad \to \quad ran\ (M) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (M') = 3$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

38
S **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} 3x - 2y \qquad + 1 = 0 \\ \qquad 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) \mathbin{//} (2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 4, -1)$

El plano que buscamos es paralelo a $(2, 3, -2)$ y a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

39 **Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, halla m para que sean:**

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \rightarrow m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \rightarrow m = 13$

40 **S** **Halla el valor de a para que las rectas r y s estén en un mismo plano y halla la ecuación de ese plano:**

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = a \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de r y s en forma paramétrica:

$$r: \left\{\begin{array}{l} x - 2z = 0 \rightarrow x = 2z \\ y - z = 2 \rightarrow y = 2 + z \end{array}\right\} \qquad r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \\ x + 2z = a \rightarrow z = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \dfrac{a}{2} - \lambda \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada recta:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(0, 2, 0)$

$\vec{d}_s(2, -2, -1)$; $P'(0, 1, a/2)$

$\overrightarrow{PP'}(0, -1, a/2)$

Para que las rectas estén en el mismo plano, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a/2 \end{vmatrix} = -3a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{-4}{3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (2, -2, -1) = (1, 4, -6)$

El punto $P(0, 2, 0)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $1(x - 0) + 4(y - 2) - 6(z - 0) = 0$

$$x + 4y - 6z - 8 = 0$$

41 **Estudia la posición de la recta $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $z = 1$.**

Son perpendiculares y se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

42 **S** **Sean la recta** $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a **para que** r **sea paralela al plano.**

b) ¿Existe algún valor de a **para el cual** r **sea perpendicular al plano?**

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Para que r sea paralela al plano, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ han de ser perpendiculares:

$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \quad \to \quad a = -3$

b) Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ deberían tener sus coordenadas proporcionales.

Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, *no* existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

43 **S** **Dados la recta** $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta** s **contenida en el plano** π **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r.

☛ ***El vector dirección de*** s ***ha de ser perpendicular al vector dirección de*** r ***y al vector normal del plano.***

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

44 **S** **Halla la ecuación de la recta paralela a** $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ **que pase por el punto de intersección de la recta** $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ **con el plano** $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: x - y + z = 7$

$1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7$

$5\lambda = 5 \quad \to \quad \lambda = 1$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Página 176

45 **S** **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.**

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

46 **S** **Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y es paralelo a $s: \dfrac{1-x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.**

Un vector dirección de r es: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$

El plano que buscamos es paralelo a $(1, -1, -3)$ y a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$

Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = 0 \ \rightarrow \ y = 1 \\ -y + z = 0 \ \rightarrow \ z = y = 1 \end{array}\right\} P(0, 1, 1)$$

La ecuación del plano es: $13(x - 0) + 10(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

47 **S** **Estudia las posiciones relativas del plano: $\pi: x + ay - z = 1$ y de la recta: $r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores de a.**

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \quad x + ay - z = 1 \\ r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \end{array}\right\} M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a - 1 \end{array}\right)$$

where the first three columns form M.

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

• Si $a = -1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ planos paralelos. La recta es paralela al plano.

• Si $a = 2$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1ª ecuación se obtiene restándole a la 2ª la 3ª.

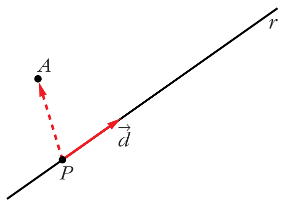
Por tanto, la recta está contenida en el plano.

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.

48 S **Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta:**

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la r es: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$



Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } z + 1 = 0 \rightarrow z = -1 \\ y = 2z = -2 \end{array}$$

$P(0, -2, -1)$

El plano es paralelo a $\vec{d}(1, -4, -3)$ y a $\overrightarrow{PA}(1, 2, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) \,//\, (2, 5, -6)$

La ecuación del plano es: $2(x - 1) + 5(y - 0) - 6(z - 1) = 0$

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0$$

49 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 5)$, $\vec{v}(6, -3, 2)$, $\vec{w}(4, -6, 3)$, $\vec{p}(8, 0, a)$, y los planos: $\pi: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ y $\pi': (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$, estudia la posición relativa de π y π' según los valores de a.**

Obtenemos las ecuaciones implícitas de los dos planos:

$\vec{u} \times \vec{v} = (21, 26, -24)$

$\pi: 21(x - 1) + 26(y - 2) - 24(z - 3) = 0$

$\pi: 21x + 26y - 24z - 1 = 0$

$\vec{w} \times \vec{p} = (-6a, 24 - 4a, 48)$

$\pi': -6a(x - 1) + (24 - 4a)(y - 2) + 48(z - 3) = 0$

$\pi': -6ax + (24 - 4a)y + 48z + (14a - 192) = 0$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -6a & 24-4a & 48 & 192-14a \end{array}\right)$$

with M being the first three columns:

$$\left|\begin{matrix} 21 & -24 \\ -6a & 48 \end{matrix}\right| = 1\,008 - 144a = 0 \;\rightarrow\; a = 7$$

- Si $a = 7$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -42 & -4 & 48 & 94 \end{array}\right) \;\rightarrow\; \text{Los planos se cortan en una recta.}$$

- Si $a \neq 7 \;\rightarrow\; ran\ (M) = ran\ (M')$. Los planos se cortan en una recta.

Los planos se cortan en una recta cualquiera que sea el valor de a (aunque no sea siempre la misma recta).

50 S **Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m:**

$$\left\{\begin{aligned} x + y \quad\;\; &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= m+1 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x + y \quad\;\; &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= m+1 \end{aligned}\right\} \; M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{array}\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \; \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = 1 \neq 0 \;\text{ y }\; |M| = 0 \;\rightarrow\; ran\ (M) = 2$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \;\rightarrow\; ran\ (M) = ran\ (M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

51 **S** **Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:**

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

α: contiene a la recta s_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: contiene a la recta s_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Así, $r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

52 **S** **Dados los planos: $\pi: ax + y + z = a$ y $\pi': x - ay + az = -1$ comprueba que se cortan en una recta para cualquier valor de a. Obtén el vector director de esa recta en función de a.**

$$\left.\begin{array}{l} \pi: ax + y + z = a \\ \pi': x - ay + az = -1 \end{array}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0$ para todo valor de a.

Por tanto, $ran\ (M) = 2$ para cualquier valor de a; es decir, los planos se cortan en una recta (cualquiera que sea el valor de a).

- Vector dirección de la recta: $(a, 1, 1) \times (1, -a, a) = (2a, 1 - a^2, -a^2 - 1)$

53 **S** **Considera estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 4x + 5y + 7 = 0 \\ 3y - 4z + 7 - m = 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de m para que estén en un mismo plano.

b) Escribe la ecuación de dicho plano.

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ \vec{d}_s = (4, 5, 0) \times (0, 3, -4) = (-20, 16, 12) \;//\; (-5, 4, 3) \end{array}\right\}$

Como las rectas no son paralelas ni coincidentes, para que estén en un mismo plano se han de cortar en un punto. Imponemos esta condición. Para averiguar el punto de corte, sustituimos las coordenadas de un punto de r en las ecuaciones de s y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 4(3+\lambda)+5(-1+2\lambda)+7=0 \;\to\; 14\lambda+14=0 \;\to\; \lambda=-1 \\ 3(-1+2\lambda)-4(2+\lambda)+7-m=0 \;\to\; 2\lambda-4-m=0 \;\to\; -6-m=0 \;\to\; m=-6 \end{cases}$$

Por tanto, para que las rectas estén en un mismo plano, ha de ser $m=-6$.

b) Si $m=-6$, las rectas se cortan en el punto $(2, -3, 1)$ (lo obtenemos haciendo $\lambda=-1$ en las ecuaciones de r).

El plano que buscamos pasará por ese punto y será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Luego, un vector normal al plano será:

$(1, 2, 1)\times(-5, 4, 3)=(2, -8, 14) \;\to\; \vec{n}(1, -4, 7)$

La ecuación del plano es: $1(x-2)-4(y+3)+7(z-1)=0$

$x-4y+7z-21=0$

54 **S** **Dadas la rectas** $r: \begin{cases} x-3y+6=0 \\ ax-3z+3=0 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x-2ay+4a-1=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$ **:**

a) Averigua si existe algún valor de a para el cual las rectas están contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de dicho plano.

b) Determina, cuando sea posible, los valores de a para los cuales las rectas son paralelas y los valores de a para los que las rectas se cruzan.

a) Obtenemos un vector dirección de cada una de las rectas:

$\vec{d}_r$: $(1, -3, 0)\times(a, 0, -3)=(9, 3, 3a)\,//\,(3, 1, a)=\vec{d}_r$

$\vec{d}_s$: $(1, -2a, 0)\times(0, 2, -1)=(2a, 1, 2)=\vec{d}_s$

Las coordenadas de los dos vectores no son proporcionales para ningún valor de a; por tanto, las rectas no son paralelas ni coincidentes. Para que estén en un mismo plano, se han de cortar en un punto.

Obtenemos un punto de cada una de las rectas:

r: $x=0 \;\to\; y=2,\; z=1 \;\to\; P(0, 2, 1)$

s: $y=0 \;\to\; z=-4,\; x=1-4a \;\to\; P'(1-4a, 0, -4)$

$\overrightarrow{PP'}(1-4a, -2, -5)$

Para que las rectas se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \\ 1-4a & -2 & -5 \end{vmatrix} = a-1=0 \;\to\; a=1$$

Si $a=1$, las rectas son secantes, y, por tanto, están contenidas en un plano.

El plano será paralelo a (3, 1, 1) y a (2, 1, 2). Un vector normal al plano será:

$\vec{n} = (3, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1)$.

Un punto del plano es, por ejemplo, $P(0, 2, 1)$. Así, la ecuación del plano es:

$1(x - 0) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$

$x - 4y + z + 7 = 0$

b) Por lo obtenido en el apartado anterior, sabemos que:

- No hay ningún valor de a para el que las rectas sean paralelas.
- Si $a \neq 1$, las rectas se cruzan.

CUESTIONES TEÓRICAS

55 Demuestra que la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ puede escribirse así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- Si sustituimos las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación dada, vemos que la cumplen.
- Por otra parte, para ver los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano dado, hacemos lo siguiente:

— corte con el eje $X \;\rightarrow\; y = z = 0 \;\rightarrow\; x = a \;\rightarrow\; A(a, 0, 0)$

— corte con el eje $Y \;\rightarrow\; x = z = 0 \;\rightarrow\; y = b \;\rightarrow\; B(0, b, 0)$

— corte con el eje $Z \;\rightarrow\; x = y = 0 \;\rightarrow\; z = c \;\rightarrow\; C(0, 0, c)$

56 Un plano queda determinado por un punto A y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué condición tienen que cumplir $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para determinar un plano?

Tener distinta dirección.

57 Explica cómo se obtienen las ecuaciones paramétricas de un plano del que se conoce la ecuación implícita. Aplícalo al plano $x + 2y - z - 1 = 0$.

Hacemos, por ejemplo, $y = \lambda$, $z = \mu$ y despejamos x.

En el caso del plano $x + 2y - z - 1 = 0$, quedaría: $x = 1 - 2y + z$; es decir:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$ son sus ecuaciones paramétricas.

Página 177

58 **¿Cuáles son las ecuaciones implícitas de la recta $\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{2}$?**

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

59 **¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?**

Paralelas o secantes.

60 **Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en π_1 y π_2, respectivamente. ¿Podemos asegurar que r_1 y r_2 son paralelas?**

No. Pueden ser paralelas o cruzarse.

61 **Las rectas r y s se cruzan. Si hallamos el plano que contiene a r y es paralelo a s, y el plano que contiene a s y es paralelo a r, ¿cómo son entre sí esos planos?**

Paralelos.

62 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano $ax + by + cz + d = 0$. Prueba que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al vector $\vec{n}(a, b, c)$.**

☛ ***Sustituye las coordenadas de A y de B en la ecuación del plano y resta las igualdades que obtienes.***

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \;\;\to\;\; ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ B \in \pi \;\;\to\;\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{array}\right\}$$

Restando, obtenemos:

$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$; es decir:

$(a, b, c) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \;\;\to\;\; \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\vec{n}$.

63 **Dados una recta $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ y un plano $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, ¿qué significa geométricamente que el sistema que se obtiene juntando las ecuaciones de la recta y el plano sea incompatible? ¿Y si es compatible indeterminado?**

Si el sistema es incompatible, significa que la recta y el plano son paralelos. Si es compatible indeterminado, significa que la recta está contenida en el plano.

64 **Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano $ax + by + cz + d = 0$ sea:**

a) Paralelo al plano *OXY*.

b) Perpendicular al plano *OXY*.

c) Paralelo al eje *Z*.

d) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $a = b = 0,\ \ c \neq 0,\ \ d \neq 0$

b) $c = 0$

c) $c = 0,\ \ d \neq 0$

d) $a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ \ c \neq 0$

PARA PROFUNDIZAR

65 **Dados el plano π: $ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

Halla, en función de a, los puntos de corte P, Q y R. Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \ \rightarrow\ z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π con r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \ \rightarrow\ z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \ \rightarrow\ z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \ \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \quad \rightarrow \quad -2-10a = -1-11a \quad \rightarrow \quad a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \quad \rightarrow \quad a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.

66 **Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$, es paralela al plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$ y corta la recta $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$**

- Como corta a s, pasará por el punto $P(1, 3, K)$ para cierto valor de K.
- Como pasa por $A(1, 1, 1)$ y por $P(1, 3, K)$, un vector dirección es: $\overrightarrow{AP}(0, 2, K-1)$.
- Como ha de ser paralelo al plano π, será perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}(1, -1, 1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -2 + K - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad K = 3, \text{ es decir: } \overrightarrow{AP}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$$

- Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

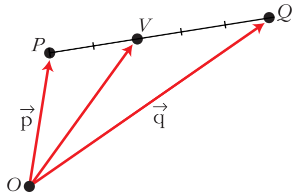
PARA PENSAR UN POCO MÁS

67 **Puntos interiores en un segmento**

Dividimos el segmento PQ en cinco partes iguales y situamos el punto V a dos unidades de P y tres de Q. ¿Cuáles son las coordenadas de V? Para hallarlas procedemos así.

Llamamos $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OV} = \vec{p} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{5}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{3}{5}\vec{p} + \frac{2}{5}\vec{q}$$



a) Si $P(4, -1, 8)$ y $Q(-1, 9, 8)$, halla las coordenadas de V.

b) Obtén las coordenadas de un punto W situado en el segmento PQ del siguiente modo: se divide el segmento en 7 partes iguales y situamos W a 2 de P. Aplícalo a $P(2, 11, -15)$, $Q(9, -3, 6)$.

c) Demuestra que si dividimos el segmento PQ en $m + n$ partes y situamos X a m unidades de P, las coordenadas de X son:

$$\frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Demuestra que si $0 \le \alpha < 1$, entonces $(1 - \alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$ es un punto de $\overline{PQ}$.

a) $V = \frac{3}{5}(4, -1, 8) + \frac{2}{5}(-1, 9, 8) = (2, 3, 8)$

b) Razonando como en el caso anterior, llegamos a:

$$\vec{OW} = \vec{p} + \frac{2}{7}\vec{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{5}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$$

Si consideramos el caso $P(2, 11, -15)$ y $Q(9, -3, 6)$, entonces:

$$W = \frac{5}{7}(2, 11, -15) + \frac{2}{7}(9, -3, 6) = (4, 7, -9)$$

c) Razonando como en los casos anteriores, tenemos que:

$$\vec{OX} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{PQ} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}(\vec{q} - \vec{p}) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} = \frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Llamamos $d = |\vec{PQ}|$. Sea X un punto del segmento PQ que esté a una distancia αd de P y $(1 - \alpha)d$ de Q. (Como $0 \le \alpha < 1$, entonces $0 \le \alpha d < d$; luego X pertenece al segmento PQ).

Razonando como en los apartados anteriores, tenemos que las coordenadas de X son:

$$\frac{(1-\alpha)d}{d}\vec{p} + \frac{\alpha d}{d}\vec{q}, \text{ es decir, } (1 - \alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$$

Por tanto, este punto (que es X) es un punto del segmento PQ.

7 PROBLEMAS MÉTRICOS

Página 178

Diagonal de un ortoedro

I) $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$

III) $\sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{90} \simeq 9{,}49$

Distancia entre dos puntos

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} \simeq 4{,}58$$

Página 179

Distancia de un punto a una recta

■ **Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

Describe el proceso que seguirías para hallar la distancia de un punto P a un plano π, de modo que, finalmente, se reduzca al cálculo de la distancia entre dos puntos.

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r:

  $0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0$; es decir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punto, Q, de corte de r y π:

  $-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$

  $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$

  $5\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

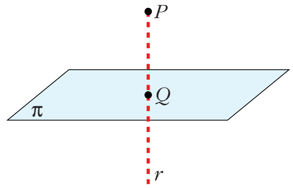
  El punto es $Q(2, 0, 9)$.

- Calculamos la distancia:

  $dist\ (P, r) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$

Distancia de un punto a un plano

■ **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π: $5y + 12z - 1 = 0$**



— Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

— Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π.

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q.

Para el punto y el plano dados:

• Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

• Punto, Q, de intersección de r y π:

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1\,014 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

• Calculamos la distancia:

$$dist\ (P, \pi) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5\,184} = \sqrt{6\,084} = 78$$

Página 180

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (1, 0, 7) y es perpendicular al plano $5x - 3z + 4 = 0$.

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por (1, –3, 5) y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$5(x-1) - 6(y+3) + 1(z-5) = 0 \rightarrow 5x - 6y + z - 28 = 0$

3. Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por $(1, 0, -3)$.

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, $(5, -1, 0)$. Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es: $5(x-1) - y + 0(z+3) = 0 \rightarrow 5x - y - 5 = 0$

4. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por $(5, -7, -2)$.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a r, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, 2, -6)$

Por tanto, la ecuación de π es:

$5(x-5) + 2(y+7) - 6(z+2) = 0 \rightarrow 5x + 2y - 6z - 23 = 0$

Página 181

5. Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s:

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por $(5, -1, 8)$ y es paralelo a $(1, 0, 2)$ y a $(3, -1, 4)$. Un vector normalal plano es:

$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$

La ecuación del plano es: $2(x-5) + 2(y+1) - 1(z-8) = 0$; es decir: $2x + 2y - z = 0$

6. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Página 183

1. Calcula el ángulo que forma la recta: $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) \,//\, r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \quad \to \quad \alpha = 2°\ 14'\ 59''$$

2. Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π:

$A(3, 0, -1)$ $\qquad$ $\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0$

Un vector dirección de la recta es el vector normal al plano: $(2, -3, -1)$.

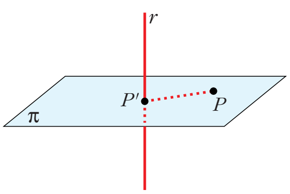
Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Página 185

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.

Hazlo por cada uno de los tres métodos aprendidos.

■ Solución, obteniendo previamente el punto P':



• Plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$

• Intersección, P', de π y r:

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

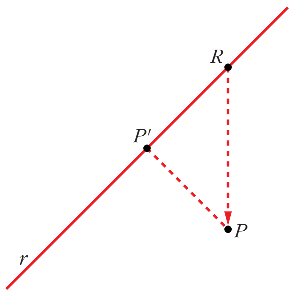
$$27\lambda - 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$$

El punto es $P'(5, 1, 1)$.

• Distancia entre P y r:

$$dist\ (P, r) = dist\ (P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

■ Segundo método:



$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.

El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0$; es decir:

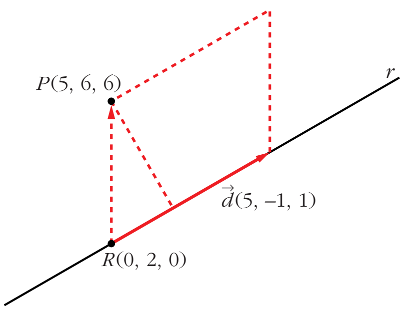
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$

$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$

$$-27\lambda + 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

■ Solución directa a partir del producto vectorial:



$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\ (P, r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Página 186

2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11 \text{ u}$$

3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.

$$dist\ (Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi) \qquad dist\ (R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 188

4. **Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left. \begin{array}{l} (12, 0, 5) \parallel r \\ (0, 1, 0) \parallel s \end{array} \right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$dist\ (r, s) = dist\ (s, \pi) = dist\ [(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

Punto genérico de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \ \rightarrow \ -169\lambda - 169 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \ \rightarrow \ 4 + \mu = 0 \ \rightarrow \ \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $dist\,(r, s) = \dfrac{169}{13} = 13$

5. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (5, -1, 1) \,//\, r \\ (7, -5, -5) \,//\, s \end{array}\right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) \,//\, (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$$5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

- Segundo método:

Punto genérico de r: $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

Punto genérico de s: $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \quad \rightarrow \quad 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = 0$$

■ Tercer método:

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$R(0, 2, 0)$ $\quad \vec{d}(5, -1, 1)$

$S(5, 1, 1)$ $\quad \vec{d}'(7, -5, -5)$

$\vec{RS}(5, -1, 1)$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ \text{(las dos primeras filas son iguales).}$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = 0$

Página 189

6. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$\boldsymbol{r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \quad \pi: x + 3y = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) \,//\, r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array}\right\} \ \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{d} \perp \vec{n} \ \Rightarrow \ r \,//\, \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\ (r, \pi) = dist\ [(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

7. Calcula la distancia entre los planos: $\boldsymbol{\pi: y - 5z + 4 = 0}$ y $\boldsymbol{\pi': 2y - 10z = 0}$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π'. Por tanto:

$$dist\ (\pi, \pi') = dist\ (P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78$$

Página 191

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $\boldsymbol{A(1, 3, 5)}$, $\boldsymbol{B(2, 5, 8)}$ y $\boldsymbol{C(5, 1, -11)}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB}(1, 2, 3) \\ \vec{AC}(4, -2, -16) \end{array}\right\} \ \vec{AB} \times \vec{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75 \text{ u}^2$$

2. **Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2) \end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 192

1. **Halla el L. G. de los puntos que equidistan de:**

a) $\boldsymbol{A(4, -1, 7)}$ **y** $\boldsymbol{B(-2, 5, 1)}$

b) $\boldsymbol{\pi: x + y + z - 2 = 0}$ **y** $\boldsymbol{\pi': x - y + z - 2 = 0}$

c) $\boldsymbol{\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0}$ **y** $\boldsymbol{\pi': x - 3y + 2z = 0}$

a) *dist* (X, A) = *dist* (X, B)

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \quad \to \quad x - y + z - 3 = 0$$

Es el plano mediador del segmento AB.

b) *dist* (X, π) = *dist* (X, π')

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}}$$ Dos posibilidades:

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \quad \to \quad 2y = 0 \quad \to \quad y = 0$
- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \quad \to \quad 2x + 2z - 4 = 0 \quad \to \quad x + z - 2 = 0$

Son los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π'. Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π'. Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) *dist* (X, π) = *dist* (X, π')

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$ Dos posibilidades:

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \quad \to \quad -8 = 0 \quad \to$ Imposible.
- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \quad \to \quad 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \quad \to \quad x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 193

2. **Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.**

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es (–1, 5, 0).

3. **Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 33 = 0$ corta a la esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.**

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es: $d = \dfrac{|8 - 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{25}{5} = 5$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

El radio de la circunferencia es 12.

4. **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Comprueba que se trata de una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.**

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

Página 194

5. **Halla el L. G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.**

$dist\ (X, F) + dist\ (X, F') = 26$

$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$

$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$

$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + x^2 + y^2 + (z + 5)^2 - 52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$

$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + \cancel{25} + 10z - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} - \cancel{25} + 10z$

$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$

$13\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$

$169\,[x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169\,[x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1\,690z} + 4\,225 = 25z^2 + \cancel{1\,690z} + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24\,336$

$\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{169} = 1$

Es un elipsoide.

6. **Halla el L. G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$|\,dist\,(X, F) - dist\,(X, F')\,| = 6$

$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x + 5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$

$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$

$\pm 12\sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$

$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$

$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{16} = 1$

Es un hiperboloide.

7. **Halla el L. G. de los puntos que equidistan del plano $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?**

$dist\,(X, F) = dist\,(X, \pi)$, donde π: $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y $F\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$.

$\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \dfrac{1}{4}\right|$

$\cancel{x^2} - \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}}$

$x = y^2 + z^2$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Página 201

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Estudia la posición de las rectas r y s y halla el ángulo que forman:**
S

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s = (3, 2, 5)$; $P'(0, 1, -14)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 1, -29)$

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -29 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Las rectas se cortan en un punto.}$$

El ángulo que forman es: $cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = \dfrac{0}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

2 **Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:**
S

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90° - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90° - \alpha = 90° \rightarrow \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 90° - \alpha = 30° \rightarrow \alpha = 60°$$

3 S **Calcula el ángulo que forman los planos α: $z = 3$ y β: $x - y + 2z + 4 = 0$.**

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \rightarrow \alpha = 35°\ 15'\ 52''$$

4 **Halla el área de cada uno de los triángulos:**

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

5 S **Calcula la distancia del punto dado a la recta, en los siguientes casos:**

a) $P(0, 7, 0)$; r: $\begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -10 + 3\lambda \end{cases}$

b) $P(1, 0, 0)$; r: $x - 1 = \dfrac{y + 1}{2} = z$

c) $A(1, 2, 3)$; r: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $R(-5, 5, -10) \in r$; $\vec{d}(4, 1, 3) \parallel r$

$\overrightarrow{RP}(5, 2, 10)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 2, 10) \times (4, 1, 3) = (-4, 25, -3)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = \sqrt{25} = 5$$

b) $R(1, -1, 0) \in r$; $\vec{d}(1, 2, 1) \parallel r$

$\overrightarrow{RP}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (0, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

c) $R(0, 0, 1) \in r$; $\vec{d}(0, 0, 1) \parallel r$

$\overrightarrow{RA}(1, 2, 2)$

$\overrightarrow{RA} \times \vec{d} = (1, 2, 2) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0)$

$$dist\ (A, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

6 S **Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

$\vec{d}_r(12, 0, 5)$; $P(13, 2, 8)$

$\vec{d}_s(0, 1, 0)$; $P'(6, 6, -9)$

$\overrightarrow{PP'}(-7, 4, -17)$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{169}{|(-5, 0, 12)|} =$$

$$= \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13$$

7 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:**

a) **(2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)**

b) **(4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)**

a) $A(2, 1, 4)$ $B(1, 0, 2)$ $C(4, 3, 2)$ $D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$ $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$ $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \quad \to \quad \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$ $B(2, 0, 1)$ $C(2, 3, 4)$ $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$ $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$ $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \quad \to \quad \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

8 **Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

***A*(2, 3, 1), *B*(4, 1, –2), *C*(6, 3, 7), *D*(–5, –4, 8)**

- Área del triángulo ABC:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \approx 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \approx 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total $= 14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02$ u^2

- Volumen: $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$ $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$ $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \quad \to \quad \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51{,}33 \text{ u}^3$$

9 **S** **Calcula la mínima distancia entre los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 5 - 5\mu \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$

a) $\vec{d}(-2, 2, -3)$; $P(-4, -5, -1)$

$\vec{d}'(-3, -1, -5)$; $P'(5, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(9, 9, 6)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|} = \frac{78}{|(-13, -1, 8)|} =$$

$$= \frac{78}{\sqrt{234}} = 5{,}1$$

b) $\vec{d}(1, -2, -7)$; $P(1, 1, 5)$

$\vec{d}'$: $(2, -3, 0) \times (3, -1, 0) = (0, 0, 7) \,//\, (0, 0, 1) = \vec{d}'$; $P'\left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$

$\overrightarrow{PP'}\left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}, -5\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -8/7 \\ -2 & 0 & -3/7 \\ -7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{19}{7} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|} = \frac{19/7}{|(-2, -1, 0)|} =$$

$$= \frac{19/7}{\sqrt{5}} \approx 1{,}21$$

10 **Calcula la distancia entre las rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

$\vec{d}_r(12, 0, 1)$; $P(13, 2, 8)$

$\vec{d}_s(0, 1, 0)$; $P'(6, 6, -9)$

$\overrightarrow{PP'}(-7, 4, -17)$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -17 \end{vmatrix} = -197 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{197}{|(-1, 0, 12)|} =$$

$$= \frac{197}{\sqrt{145}} \approx 16{,}36$$

11 **S** **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$**

☛ ***Recuerda que $V = 1/3 \cdot$ área base $\times$ altura.***

En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí.

Hazlo también utilizando el producto mixto y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{540}\ u^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\ |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{540}\ u^3$$

12 **S** **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; A\left(0,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; B\left(\frac{1}{2},\, 0,\, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; C\left(0,\, \frac{1}{3},\, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144}\ \text{u}^3$$

Página 202

13 S **Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2:**

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \;\rightarrow\; \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a r_1 y a r_2:

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \;\rightarrow\; \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \text{ o bien } \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

Esfera

14 **Di cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. *No es una esfera.*

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera.*

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \quad \to \quad \text{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera.*

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \quad \to \quad \text{radio} = \sqrt{6}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \quad \to \quad \text{radio} = \sqrt{15}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \quad \to \quad \text{radio} = 2$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

15 **Halla la ecuación de las siguientes esferas:**

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB: $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

La ecuación es: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano π: $x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano π: $x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π: $r = dist\,(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

16 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro (2, –1, 4) y radio 7:

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 49$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$

PARA RESOLVER

17 **S** **Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano σ: $2x - y + 3z + 1 = 0$.**

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$

$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \rightarrow \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \quad \to \quad (2, -1, 3) \; // \; \pi$$

Obtenemos un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \quad \to \quad (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\text{: } 5x + 7y - \;\; z + 3 = 0 \\ \sigma\text{: } 2x - \;\; y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \to \quad \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} 7y - \;\; z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\end{array}\right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\left\{\begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{array}\right.$

18 **S** **Dados la recta** r**:** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - y}{1} = \dfrac{z + 1}{3}$ **y el plano** π**:** $x + 3y - 3z + 3 = 0$**, halla el plano que contiene a** r **y es perpendicular a** π**.**

$$r\text{: } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 1}{3} \quad \to \quad P(0, 1, -1);\; \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi\text{: } x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \to \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$ y contendrá a P.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \to \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

19 **S** **Determina la perpendicular común a las rectas:**

$$r\text{: } \left\{\begin{array}{l} x + \;\; y = z + 4 \\ x + 2y = \quad\;\; 7 \end{array}\right. \qquad s\text{: } \left\{\begin{array}{l} x - \quad\; 2 = 0 \\ \quad\; y + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$r: \left\{ \begin{array}{l} x + \ \ y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\}$ Restando la 1ª ecuación a la 2ª: $y = 3 - z$
$x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$

$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \rightarrow$ Un punto genérico de r es: $R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$

$s: \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{array} \right. \rightarrow$ Un punto genérico de s es: $S(2, -3, \mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow \ 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \ \rightarrow \ -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \ \rightarrow \ \mu - \lambda = 0 \ \rightarrow \ \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{8}{5}; \ \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \ \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \ \rightarrow \ \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{array} \right.$$

20 **S** **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x - 1}{1} = \frac{y - p}{p - 1} = \frac{z - 3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p - 1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \ \rightarrow \ p = 6$

b) $r_1: \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right. \qquad r_2: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{array} \right.$

• Punto de intersección:

$$\left.\begin{array}{r} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$1 = 9 + 8\mu \;\rightarrow\; -8 = 8\mu \;\rightarrow\; \mu = -1$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: (0, 1, 0).

• Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \;\rightarrow\; (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$8x + 5y - 11z - 5 = 0$

21 **S** **Dados la recta** $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: \; x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano** π, **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r.

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a (2, 1, 1) y perpendicular a (1, 2, 3) (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

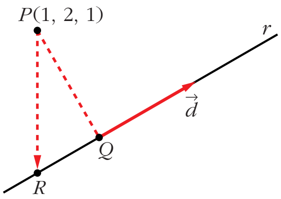
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

22 **S** **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta** $r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 & \rightarrow \quad y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 & \rightarrow \quad x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \to \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda,\ 1 - 2\lambda,\ \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \quad \to \quad (1 - \lambda, -1 -2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \to \quad 6\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda = 0$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(12, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

23 **S** **Los vértices del triángulo *ABC* son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice *B* que está en el eje *OY*.**

Los vértices del triángulo son:

$y = z = 0 \quad \to \quad 2x = 6 \quad \to \quad x = 3 \quad \to \quad A(3, 0, 0)$

$x = z = 0 \quad \to \quad y = 6 \quad \to \quad B(0, 6, 0)$

$x = y = 0 \quad \to \quad -3z = 6 \quad \to \quad z = -2 \quad \to \quad C(0, 0, -2)$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

— Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \quad \to \quad \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$

— Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\to \quad (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 \quad \to \quad (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \quad \to \quad 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 \quad \to \quad (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \quad \to \quad 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \quad \to \quad$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

24 **S** **Halla el punto P de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:**

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \;\rightarrow\; 6\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \;\rightarrow\; 6\lambda = -6 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

Página 203

25 **S** **Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.**

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \;\rightarrow\; a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \;\rightarrow\; a = 3 \end{cases} \Bigg\} \; a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2 - 9}, \frac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\ (P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \quad \rightarrow \quad 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \quad \rightarrow \quad a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} a^2 = 49 \quad \rightarrow \quad a = \pm 7 \\ a^2 = \ \ 1 \quad \rightarrow \quad a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

26 S Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas: $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \quad \rightarrow \quad (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

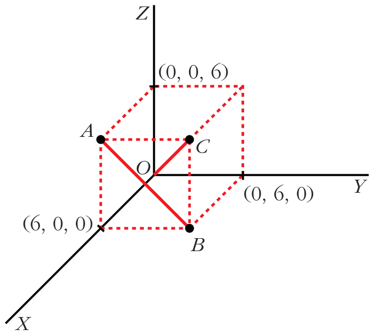
$\vec{d}(3, 2, 1)$; $\vec{n}(2, 1, -3)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29''$$

27 **S** **Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.**

Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.



- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

- $dist\ (r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \quad \rightarrow \quad |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

28 **S** **Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).**

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es:

$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

29 **S** **Determina, razonadamente, si las rectas**

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan. Halla también el coseno del ángulo que forman sus direcciones.

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada una de las dos rectas:

$$\vec{d}_r: (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{d}_r(1, 5, 3);\ \ P(0, -1, 0)$$

$\vec{d}_s$: $(2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \rightarrow \vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0{,}0976$$

30 **Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que estos tres planos: $ax + z - 1 = 0$, $x + bz + 2 = 0$, $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ se corten en un punto.**

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left.\begin{array}{l} ax \quad\quad + z = 1 \\ x \quad\quad + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \rightarrow ab \neq 1$$

• **Si $a = 2$ y $b = 1$**, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando: } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

• **Ángulo que forma la recta con el 3er plano:**

$\vec{d}(0, 1, 0)$ $\vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}\,||\vec{n}\,|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 90° - \alpha = 45° \rightarrow \alpha = 45°$$

31 **a) Encuentra los puntos de r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano π: $2x - y + 2z + 1 = 0$.**

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = \ \ x \end{array}\right\} \ \rightarrow \ r: \begin{cases} x = \ \ \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \ \ \lambda \end{cases} \ \rightarrow \ \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{array}{l} 5\lambda + 1 = \ \ 1 \ \rightarrow \ \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \ \rightarrow \ \lambda = -2/5 \end{array}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

  Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

  Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \ \rightarrow \ 9\lambda = -1 \ \rightarrow \ \lambda = -\frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

  Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = \ \ 2/5 - \ \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

  Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

32 S **Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.**

a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$

$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

33 S **Calcula el volumen de un cubo que tiene aristas sobre cada una de las rectas r y s:**

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s: \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14}$$

• Hallamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r = (2, 6, -1)$; $P(1, -2, -1)$

$\vec{d}_s = (13, 2, 14)$; $P'(0, 8, 6)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, 10, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \\ -1 & 14 & 7 \end{vmatrix} = -1\,014 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

• La arista del cubo es la distancia entre las dos rectas:

$$dist(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{1\,014}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{1\,014}{|(86, -41, -74)|} =$$

$$= \frac{1\,014}{\sqrt{14\,553}} = \text{arista del cubo}$$

• El volumen del cubo es:

$$V = \left(\frac{1\,014}{\sqrt{14\,553}}\right)^3 \approx 593{,}86 \text{ u}^3$$

34 **Determina la ecuación continua de la recta r que es perpendicular y corta a las rectas s y t de ecuaciones:**

s: $(1 + 2\lambda\,,\ 2 - \lambda,\ 1 + \lambda)$ **t: $(4 + \mu,\ 6 + \mu,\ 5 - 2\mu)$**

Un vector genérico de origen en s y extremo en t es:

$$\overrightarrow{ST}(3 - 2\lambda + \mu,\ 4 + \lambda + \mu,\ 4 - \lambda - 2\mu)$$

Este vector ha de ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ST} \cdot (2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow\ 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \ \rightarrow\ 6\lambda + \mu = 6 \\ \overrightarrow{ST} \cdot (1, 1, -2) = 0 \ \rightarrow\ 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \ \rightarrow\ \lambda + 6\mu = 1 \end{array}\right\}$$

$\lambda = 1,\ \ \mu = 0$

La recta que buscamos, corta a s en $S(3, 1, 2)$, y corta a t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector dirección es $\overrightarrow{ST}(1, 5, 3)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y - 1}{5} = \dfrac{z - 2}{3}$

35 S **Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$**

- Simétrico respecto del plano:
  - Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

  - Punto de corte de α con la recta anterior:

$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$

$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$

$14\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \dfrac{1}{2}$

La recta y el plano se cortan en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\dfrac{x + 1}{2}, \dfrac{y + 2}{2}, \dfrac{z + 3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right) \ \rightarrow\ P'(2, -1, 1)$

■ Simétrico respecto de la recta:

• Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \to \quad y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \to \quad z = 4x \end{cases}\right\} \quad \to \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

• Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \quad \to \quad P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

36
S **Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$**

• Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 + z \\ x - y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \text{ Restando: } \left.\begin{aligned} x &= \ \ 1 + 2z \\ y = x + z - 2 &= -1 + 3z \end{aligned}\right\} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

• Obtenemos el punto de corte de r con π:

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

• Calculamos la distancia:

$$dist\ (P, r) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{1\,050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2{,}31$$

37 **S** **Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:**

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(3, -5, 3)\\ \overrightarrow{AC}(-4, -3, 2)\end{array}\right\}$$ Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados. Son los vértices de un triángulo.

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC:

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r:

$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π:

$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$

$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$

$29\lambda + 20 = 0 \quad \to \quad \lambda = \dfrac{-20}{29}$

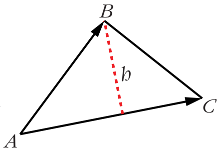
El punto (proyección de B sobre AC) es: $B'\left(\dfrac{-7}{29}, \dfrac{118}{29}, \dfrac{-40}{29}\right)$

• La longitud del segmento es la distancia entre B y B':

$$|\overrightarrow{B'B}| = \left|\left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{33\,814}{841}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$

De otra forma:

$$h = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$



Página 204

38 **S** **Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.**

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

39 **S** **Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta** $\boldsymbol{r}$**:** $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

y otro sobre $\boldsymbol{s}$**:** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$

a) Calcula el área del cuadrado.

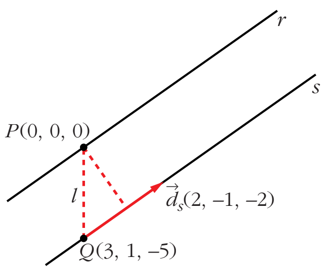
b) Encuentra cuatro puntos (dos en $\boldsymbol{r}$ **y dos en** $\boldsymbol{s}$**) que puedan ser los vértices de un cuadrado, si uno de ellos es (0, 0, 0).**

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) \,//\, (2, -1, -2)$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \ \vec{d}_r(2, -1, -2);\ \ P(0, 0, 0)$$

$\vec{d}_s(2, -1, -2)$; las dos rectas tienen la misma dirección; además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Las rectas son paralelas.



El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} =$$

$$= \frac{|(-7, -4, -5)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} =$$

= lado del cuadrado

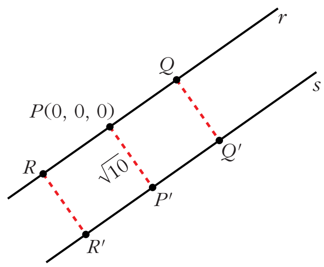
Por tanto: Área $= (\sqrt{10})^2 = 10$ u^2

b) Obtenemos los vértices que pueden estar en r:

Un punto de r es $(2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$:

$$dist\,(P, Q) = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{10} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 9\lambda^2 = 10 \ \rightarrow \ \lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$



Hay dos posibles vértices:

$$Q\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right); \quad R\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$$

- Obtenemos P': Un punto de s es de la forma: $S(3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu)$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_s = 0 \ \rightarrow \ (3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu) \cdot (2, -1, -2) = 0$$

$$6 + 4\mu - 1 + \mu + 10 + 4\mu = 0 \ \rightarrow \ 9\mu = -15 \ \rightarrow \ \mu = \frac{-5}{3}$$

$$P'\left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

• Si $Q'(x, y, z)$, como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, entonces:

$$\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{3}, y - \frac{8}{3}, z + \frac{5}{3}\right)$$

$$Q'\left(\frac{2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 - \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 - 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

• Si $R'(a, b, c)$, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$, entonces:

$$\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(a + \frac{1}{3}, b - \frac{8}{3}, c + \frac{5}{3}\right)$$

$$R'\left(\frac{-2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 + \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

Los dos cuadrados son $PQQ'P'$ y $PRR'P'$.

40 **S** **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(2, 3, 4)$; $P(1, 0, 0)$

$\vec{d}_s(1, 2, 3)$; $P'(3, 3, 4)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 3, 4) = \vec{d}_r$

Las dos rectas se cortan en el punto (3, 3, 4).

• Ángulo que forman:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = \frac{2 + 6 + 12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{406}} = 0,99 \quad \to \quad \alpha = 6°\ 58'\ 57''$$

41 **S** **Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.**

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2.

• Escribimos las rectas en forma paramétrica:

r_1: $\overrightarrow{AB}(4, -2, 0) \parallel (2, -1, 0)$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

r_2: $\overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

• Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

• Hallamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1{,}22$$

42 S **Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-3, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(0, -3, -1) \end{array}\right\} \text{Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

• Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad 5x = -1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad 3y = -1 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = y = 0 \quad \rightarrow -9z = -1 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{810}\ \text{u}^3$$

43 **S** **Calcula la distancia entre las siguientes rectas:**

$$r: \begin{cases} x - \phantom{y - {}} z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - \phantom{y + {}} z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

• Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 & \rightarrow & x = -2 + z \\ y - z = -4 & \rightarrow & y = -4 + z \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 & \rightarrow & x = z \\ y + z = 0 & \rightarrow & y = -z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(-2, -4, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 4, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

• Hallamos la distancia entre las rectas:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} =$$

$$= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

44 **S** **Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.**

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C:

a) Escribe la ecuación del plano π.

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \,//\, (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -6 \quad \rightarrow \quad A(-6, 0, 0)$

$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad -3y + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad -2z + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad z = -3 \quad \rightarrow \quad C(0, 0, -3)$

Volumen $= \dfrac{1}{6}(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6$ u^3

45 S Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$

$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \quad \rightarrow \quad 2\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$$

46 S Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array}\right\}$ No tiene las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Área $= \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$ u^2

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$

$\pi:\ 2x + z - 3 = 0$

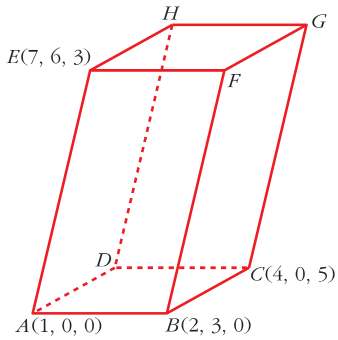
$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\,[\text{Área base} \times \text{altura}] = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1\ u^3$$

47 **S** **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases *ABCD* y *EFGH* sabiendo que *A*(1, 0, 0), *B*(2, 3, 0), *C*(4, 0, 5) y *E*(7, 6, 3).**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:



- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \rightarrow \quad (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

  $D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

  $F(8, 9, 3)$

- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \quad \rightarrow \quad G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \quad \rightarrow \quad H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0)\ \ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5),\ \ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 33\ u^3$$

48 **S** **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{1} \qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} -y + z &= 2 - x \\ -y - z &= -4 - 3x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \quad \rightarrow \quad y = 1 + 2x \\ &z = 2 - x + y = 3 + x \end{aligned}$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

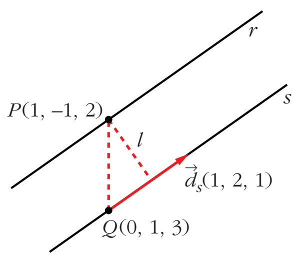
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r(1, 2, 1)$; $P(1, -1, 2)$

$\vec{d}_s(1, 2, 1)$; $Q(0, 1, 3)$

Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\ (r, s) = dist\ (P, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3}\ u^2$$

49 **S** **Dadas las rectas r y s:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$\overrightarrow{RS}(-3 -2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \ \to \ -6\lambda - 7 = 0 \ \to \ \lambda = -\dfrac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \ \to \ -2 + 3\mu = 0 \ \to \ \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) \ \rightarrow\ \vec{d}(0,\ 1,\ -1)$$

La recta es: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$

50 **S** **Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el plano α: $x - 3y + 2z + 12 = 0$.**

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$P(1, 1, 2)$; $\vec{d}_r(2, 1, 2)$; $\vec{n}(1, -3, 2)$

$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi:\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r':\ \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Página 205

51 **S** **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta r: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.**

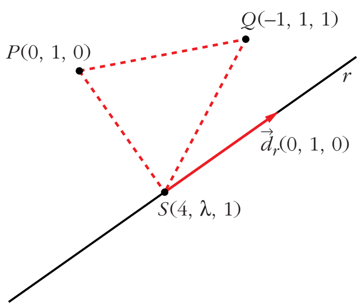
a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \ \rightarrow\ \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$



b) $\overrightarrow{PS}(4,\ 0,\ 1)$ $\overrightarrow{PQ}(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ u^2$$

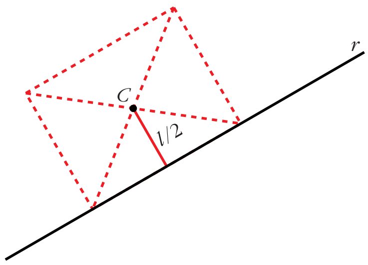
52 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \ // \ \pi$

Un vector normal al plano es:

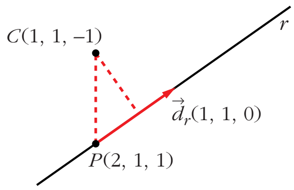
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.



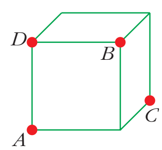
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

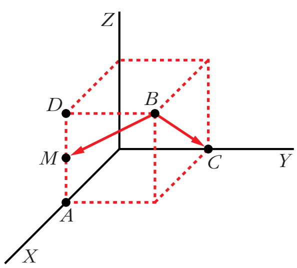
$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow$ lado del cuadrado $= l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

53 **S** **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$ $B(1, 1, 1)$ $C(0, 1, 0)$ $D(1, 0, 1)$ $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \ \rightarrow \ \alpha = 71° \ 33' \ 54''$$

54 **S** **Sea la recta** $\boldsymbol{r}$**:** $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \end{cases}$

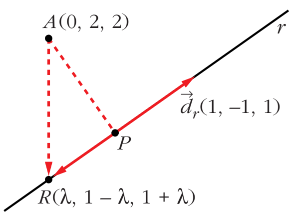
a) Determina la ecuación de la recta $\boldsymbol{s}$ **que corta perpendicularmente a** $\boldsymbol{r}$ **y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto** $\boldsymbol{P}$ **intersección de** $\boldsymbol{r}$ **y** $\boldsymbol{s}$**.**

b) Halla la ecuación del plano π **que contiene a** $\boldsymbol{r}$ **y** $\boldsymbol{s}$ **y la de la recta** $\boldsymbol{t}$ **perpendicular a** π **por el punto** $\boldsymbol{P}$**.**

c) Si $\boldsymbol{Q}$ **es cualquier punto de** $\boldsymbol{t}$**, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de** $\boldsymbol{Q}$ **a** $\boldsymbol{r}$**, a** $\boldsymbol{s}$ **y a** π**.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \rightarrow \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 & \rightarrow \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir: $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); \quad P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\pi: -2x - y + z = 0$$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

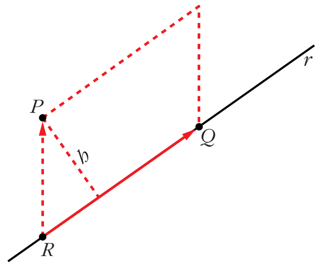
c) Si $Q \in t \quad \rightarrow \quad dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

55 **a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.**

b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q; entonces:

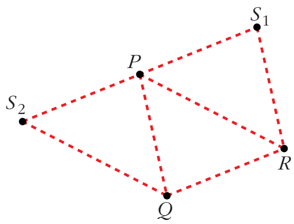


$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RP}(0, -1, 4)\\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2)\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54 \text{ u}$$

b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R.



- Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \;\rightarrow\; (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1)$

  $S_1(1, -3, 1)$

- Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \;\rightarrow\; (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1)$

  $S_2(1, 1, 5)$

56 S **Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.**

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \;\rightarrow\; (m + 1)^2 = m^2 + 2 \;\rightarrow\; m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \;\rightarrow\; m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

57 S **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $dist\ (P, A) = dist\ (P, B) \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$

π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) \parallel \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

- El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

58 S **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:**

$$\alpha: \mathbf{3x + y - 2z + 1 = 0}$$

$$\beta: \mathbf{x - 3y + 2z - 3 = 0}$$

Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan α ***y*** β.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\ (P, \alpha) = dist\ (P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

59 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 & \rightarrow \quad x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 & \rightarrow \quad x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

60 **S** **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 & \rightarrow \quad x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 & \rightarrow \quad 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 & \rightarrow \quad -2y = 30 \quad \rightarrow \quad y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 & \rightarrow \quad -22y = -60 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \dfrac{30}{11}, 0\right)$

61 **S** **Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?**

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir: $dist\,(A, P) = dist\,(A, Q) \;\rightarrow$

$$\rightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 =$$

$$= \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \quad \rightarrow \quad -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \pi\colon x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad dist\,(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

62 **Halla la ecuación de la esfera que pasa por: $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(2, 1, 1)$.**

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left.\begin{array}{lll} 1+1+1+a+b+c+d=0 & \rightarrow & a+b+c+d=-3 \\ 1+4+1+a+2b+c+d=0 & \rightarrow & a+2b+c+d=-6 \\ 1+1+4+a+b+2c+d=0 & \rightarrow & a+b+2c+d=-6 \\ 4+1+1+2a+b+c+d=0 & \rightarrow & 2a+b+c+d=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-3 \\ b=-3 \\ c=-3 \\ d=\;\;6 \end{array}$$

La ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

63 **a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$. Su ecuación es: $0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0$, es decir: $z - 1 = 0$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera. Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \quad \rightarrow \quad P'(1, 2, -1)$$

64 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$|-2z - 10| = |-z + 1|$$

$$\begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª) $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow$ Radio $= \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

2ª) $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow$ Radio $= \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

Página 206

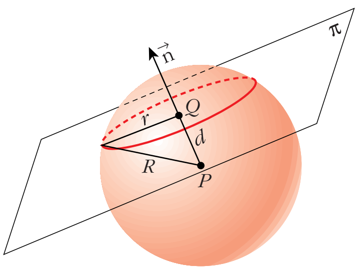
65 **La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.**

- Obtengamos el centro de la circunferencia:

— El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

— La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



— El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$

$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$Q(1, 0, 0)$

• Calculamos el radio de la circunferencia:

La distancia entre los centros P y Q es:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

El radio de la esfera es $R = 5$.

Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

66 **a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda =$$

$$= \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \;\rightarrow\; \lambda = -3 \;\rightarrow\; C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera.}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

67 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$dist\ (P, A) = 2dist\ (P, B)$

$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2} = 2\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2}$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$

$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$

Es una esfera de centro $(8, -5, -8)$ y radio $\sqrt{154} \approx 12{,}4$.

68 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}$ sea perpendicular a $\overline{PB}$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}\,(x - 4,\ y - 2,\ z)\\ \overrightarrow{BP}\,(x - 2,\ y - 6,\ z + 4)\end{array}\right\}\ \text{han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \ \ \rightarrow \ \ (x - 4)\,(x - 2) + (y - 2)\,(y - 6) + z\,(z + 4) = 0$

$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$

Es una esfera de centro $(3, 4, -2)$ y radio 3.

69 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (2, 0, 0) y (–2, 0, 0) sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 6$

$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2}$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2}$

$12\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$

$3\sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$

$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$

$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$

$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{5} = 1$

Es un *elipsoide*.

70 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de (0, 0, 3) y del plano $z = -3$.**

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$d = \big(P, (0, 0, 3)\big) = d\,(P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = \frac{|z+3|}{\sqrt{1}} = |z+3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = (z+3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un paraboloide.

71 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) es 4.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2}\right| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

72 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de destancias a los puntos (2, 3, 4) y (2, –3, 4) es igual a 8? ¿Como se llama la superficie que obtienes?**

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x-2)^2} + (y-3)^2 + \cancel{(z-4)^2} = 64 + \cancel{(x-2)^2} + (y+3)^2 + \cancel{(z-4)^2} -$$
$$- 16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

$16\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} = 64+12y$

$4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} = 16+3y$

$16(x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-8z+16) = 256+96y+9y^2$

$16x^2+7y^2+16z^2-64x-128z+208=0$

Se trata de un *elipsoide*.

73 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos (–4, 3, 1) y (4, 3, 1) es igual a 6?**

$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 6$

$4x-9 = 3\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$

$7x^2-9y^2-9z^2+54y+18z-153=0$

Se trata de un *hiperboloide*.

74 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto (0, –2, 1).**

$d(P, \pi) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ $\quad\quad$ $d(P, Q) = \sqrt{x^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$

$\left(\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2+y^2+4y+4+z^2-2z+1$

$x^2+y^2-2xy = 2x^2+2y^2+8y+8+2z^2-4z+2$

$x^2+y^2+2z^2+2xy+8y-4z+10=0$

Se trata de un *paraboloide*.

CUESTIONES TEÓRICAS

75 **La ecuación $ax+by+cz+d=0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene ese plano en cada uno de estos casos:**

I) $a=0,\ b=0$ $\quad$ II) $b=0,\ c=0$

III) $a=0,\ c=0$ $\quad$ IV) $d=0$

I) Es perpendicular al eje OZ. (Paralelo al plano OXY).

II) Es perpendicular al eje OX. (Paralelo al plano OYZ).

III) Es perpendicular al eje OY. (Paralelo al plano OXZ).

IV) Pasa por el origen, (0, 0, 0).

76 **Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.**

• La proyección ortogonal de un punto, P, sobre un plano, π, es un punto, P', tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a π. Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

Se halla la recta, r, perpendicular a π que pasa por P. El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P'.

77 **Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?**

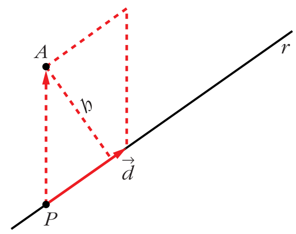
Infinitas. Todas las que, pasando por P, están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P.

78 **Dado el plano $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.**

$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

79 **Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ se puede calcular mediante la fórmula:**

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\,(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

80 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por el punto B y el vector $\vec{d}_s$. Sabemos que r y s se cruzan.**

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]\right|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y s se puede obtener así:

$$\begin{cases} det(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) *dist* (r, s) = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \ \text{y}\ \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det\ (\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$, es decir:

β: $det\ (\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto: $p: \begin{cases} det\ (\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\ (\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

81 **Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto del plano π: $ax + by + cz + d = 0$, y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, demuestra que $B \in \pi$.**

$$\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0 \ \rightarrow\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d\ (\text{pues } A \in \pi)} = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \ \rightarrow\ B \in \pi$$

Página 207

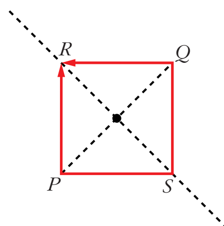
PARA PROFUNDIZAR

82 S **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.



La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ, es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

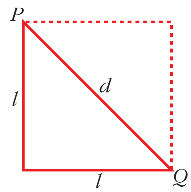
Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \quad \to$$

$$\begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

Los vértices son: $R\left(\dfrac{4 + \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\dfrac{4 - \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \quad \to \quad d^2 = 2l^2 \quad \to \quad 12 = 2l^2 \quad \to \quad l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

83 **Dados los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, prueba que la distancia, d, del origen de coordenadas al plano ABC verifica:**

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

π: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (véase ejercicio 55 de la unidad 6),

es decir: π: $\dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{1}{c}z - 1 = 0$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$dist\,(O, \pi) = \frac{\left|\dfrac{1}{a} \cdot 0 + \dfrac{1}{b} \cdot 0 + \dfrac{1}{c} \cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = d \quad \to$$

$$\to \quad \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \quad \to \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

84 **Dadas las rectas r, s y t:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r.

- Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano, π, que contiene a r y a s:

Las rectas r y s se cortan en el punto $(-2, 2, 2)$, luego el plano π contiene a este punto.

Un vector normal al plano es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \quad \to \quad \vec{n}(1, -1, 1)$$

Luego el plano es: π: $1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

π: $x - y + z + 2 = 0$

- P es el punto de corte de π con la recta t:

$k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \quad \to \quad k + 1 + k + k + 2 = 0 \quad \to \quad 3k + 3 = 0 \quad \to \quad k = -1$

El punto es $P(-1, 0, -1)$

85 **Halla las intersecciones de la superficie $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ con los planos coordenados. ¿Qué figuras obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \to$ Elipse de semiejes 4 y 3

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \to$ Elipse de semiejes 5 y 3

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \to$ Elipse de semiejes 5 y 4

Es un elipsoide.

86 **Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide:**

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0}$$

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

$2\,(x^2 - 4x + 4) + 3\,(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$

$2\,(x - 2)^2 + 3\,(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{18} = 1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

87 **Halla las intersecciones de la superficie** $\mathbf{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1}$ **con los planos coordenados y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?**

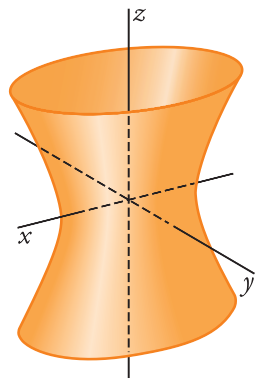
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \;\rightarrow$ Hipérbola, semieje real 2

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \;\rightarrow$ Hipérbola, semieje real 3

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \;\rightarrow$ Elipse de semiejes 3 y 2

Es un hiperboloide.

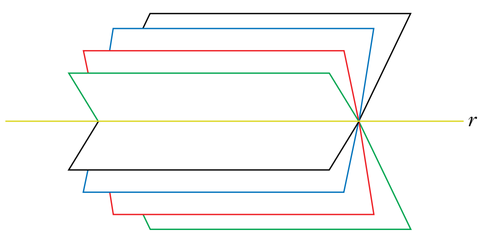


PARA PENSAR UN POCO MÁS

88 **Haz de planos**

La recta $\mathbf{r}$**:** $\begin{cases} \pi\text{: } 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma\text{: } \;x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ**.**

El conjunto de todos los planos que contienen a $\mathbf{r}$ **se llama** ***HAZ DE PLANOS*** **de arista** $\mathbf{r}$**, y su expresión analítica es:** $\mathbf{a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0}$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta

$t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$? ¿Cuál es ese plano del haz?

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s:

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \rightarrow b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a + 11b = 0 \rightarrow a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$-11(2k + 3) + (k - 3) = 0 \rightarrow -22k - 33 + k - 3 = 0$

$-21k - 36 = 0 \rightarrow k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \rightarrow k = \frac{-12}{7}$

El plano del haz es:

$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$

$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$

$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$

$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \quad \to \quad (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \to \quad -2x + 10 = 3y + 3 \quad \to \quad -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \to \quad x - 5 = 3z - 9 \quad \to \quad x - 3z + 4 = 0$$

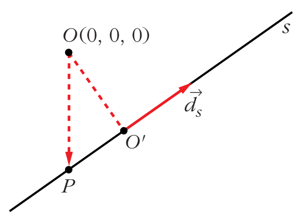
$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \to \quad 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \quad \to \quad 14\lambda + 20 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego: $O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 216

Algunos límites elementales

■ **Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} x^2$, $\lim_{x \to +\infty} x^3$, $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^2$, $\lim_{x \to -\infty} x^3$, $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim_{x \to 2} x^2$, $\lim_{x \to 2} x^3$, $\lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$

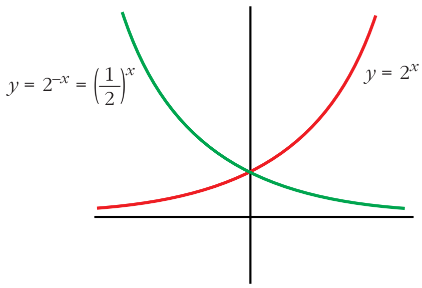
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2+1} = +\infty$

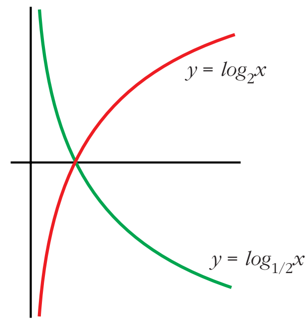
h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5} = -\infty$

Página 217

Exponenciales y logarítmicas

■ **A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:**





a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$ $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_2 x$, $\lim\limits_{x \to 0} log_2 x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to 0} log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_2 x$ no existe, $\lim\limits_{x \to 0^+} log_2 x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_{1/2} x$ no existe, $\lim\limits_{x \to 0^+} log_{1/2} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_{1/2} x = -\infty$

Con la calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot ln\,(x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim \dfrac{senx}{x} = 1$

b) $\lim \ (x-3) \cdot ln\ (x-3) = 0$

c) $\lim \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \simeq 403{,}43$

Página 221

1. **Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) + v(x)$ **b) $v(x)/u(x)$** **c) $5^{u(x)}$**

d) $\sqrt{v(x)}$ **e) $u(x) \cdot v(x)$** **f) $\sqrt[3]{u(x)}$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. **Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) - v(x)$ **b) $v(x) - u(x)$** **c) $v(x)/u(x)$**

d) $log_2\, v(x)$ **e) $u(x) \cdot v(x)$** **f) $\sqrt[3]{u(x)}$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \ \text{ si } \ v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } \ v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 222

3. **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ **b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. Calcula estos límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x)$

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$ b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x) = -\infty$

Página 223

5. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $\log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \;\to\;$ Sí

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \;\to\;$ No

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \;\to\;$ Sí

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \;\to\;$ Sí

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3 + 1} = 0 \;\to\;$ No

f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \;\to\;$ Sí

g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \;\to\;$ Sí

h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \;\to\;$ No

i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \;\to\;$ Sí

6. a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $4^x \quad 1{,}5^x \quad 3x^5 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad \log_2 x$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$$

Página 224

7. Sabiendo que, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$	**f)** $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	**k)** $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$ $\to$ Indeterminado

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0$ $\to$ Indeterminado

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ $\to$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \quad \to \quad$ No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 225

8. Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ b) $f(x)/h(x)$ c) $f(x)^{-h(x)}$ d) $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ f) $u(x)^{h(x)}$ g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ h) $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{0}$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 227

1. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$ b) $(x^2 - 2^x)$ c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$ e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2-4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$$

Página 228

3. Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x}$ **b)** $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x}$ **e)** $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^{5} = e^{5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5}$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^{2}$

Página 231

1. Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$ **b)** $x^2 + 2^x$ **c)** $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$ **e)** $2^{-x} - 3^{-x}$ **f)** $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ **h)** $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$ **i)** $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ no existe

g) $\lim_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x+2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2}$ **b)** $\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}$ **c)** $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$ **e)** $\sqrt{x^2 + 2x} + x$ **f)** $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3}$ **h)** $\left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x^3}{2x^2 + 1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right)\left(-2x - \sqrt{x^2 - x}\right)}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \dfrac{-2}{1 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^{6} = e^{6}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-5x + 3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x - 1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x - 1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1)\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

Página 234

1. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$ **b) $f(x) \cdot g(x)$** **c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

d) $f(x)^{g(x)}$ **e) $\sqrt{g(x)}$** **f) $4f(x) - 5g(x)$**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) + g(x)\big) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \big(4f(x) - 5g(x)\big) = 12 - 10 = 2$

2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [log_\alpha f(x)] = log_\alpha l$

3. **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:**

(Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones).

a) $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = 0^0$. Indeterminado.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3 - 3}{(0)} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminado.

Página 235

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 5)}{(x + 1)(x - 7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x - 1)^3 (x + 3)^3}{x^4 (x + 3)^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x - 1)^3 (x + 3)}{x^4}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)}} \to$

$$\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Página 236

6. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x + 2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

7. Calcula: $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x + 1}{x - 7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x + 1}{x - 7}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x + 1}{x - 7} \right]} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x + 1}{x - 7} \right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x - 7)(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)(x - 7)}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)}} = e^{12}$$

Página 239

1. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales la ecuación: $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ tenga una raíz.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que:

$$\left. \begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array} \right\} \text{ Hay una raíz en } (-4, -3).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (0, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (1; 1,5).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (1,5; 2).$$

2. Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array}\right\} \text{ Signo de } F(0) \neq \text{ signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$

b) x^2 en $[-3, 4]$

c) $1/(x - 1)$ en $[2, 5]$

d) $1/(x - 1)$ en $[0, 2]$

e) $1/(1 + x^2)$ en $[-5, 10]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ *no* es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

Página 245

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabiendo que $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ y $\lim c_n = 3$, di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite cuando $x \to +\infty$:

a) $a_n + b_n$ **b)** $b_n + c_n$

c) $\dfrac{a_n}{c_n}$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(a_n)^{b_n}$ **f)** $[3 - c_n] \cdot a_n$

g) $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ **h)** $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\lim\left(a_n + b_n\right) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \to$ Indeterminación.

b) $\lim\left(b_n + c_n\right) = \lim b_n + \lim c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \to$ Indeterminación.

e) $\lim [a_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim [3 - c_n] \cdot a_n = 0 \cdot (+\infty) \to$ Indeterminación.

g) $\lim \dfrac{b_n}{3 - c_n} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\lim \left[\dfrac{3}{c_n}\right]^{b_n} = 1^{-\infty} \to$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$ **b)** $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$ **d)** $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1} = \lim \dfrac{\sqrt{3}\, n}{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}} = +\infty$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3} = 0$

d) $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}} = 0$

4 Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

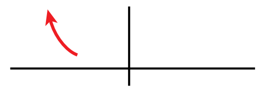
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

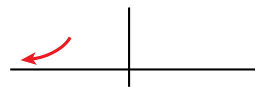
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x}$

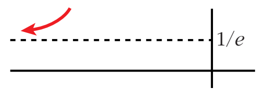
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

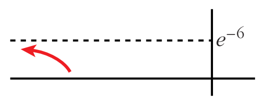


c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1+3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \dfrac{1}{e^6}$



6 **Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \dfrac{-2}{1 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

7 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

8 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$$

9 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

Página 246

10 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}\right)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

11 **Calcula:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right]$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 2} \left(\frac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right)$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} \right)$ **d)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})$

a) $$\lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{(x - 2)(x - 3)} - \frac{4}{(x - 2)} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3 - 4(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 4x + 12}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{7}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(1 - \sqrt{3 - x})(1 + \sqrt{3 - x})}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1 - (3 - x)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim_{x \to 2} \frac{1 - 3 + x}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x + 9} - 3)(\sqrt{x + 9} + 3)}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 1}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 2}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} = \frac{4}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

12 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

13 **S** **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • En $x \neq 1 \;\to\;$ $f(x)$ es continua; puesto que e^x y $\ln x$ son continuas para $x < 1$ y $x \geq 1$, respectivamente.

• En $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) = 0$

No es continua en $x = 1$, pues no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \;\to\;$ La función es continua.

• En $x = 0$: Es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

• En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

PARA RESOLVER

14 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

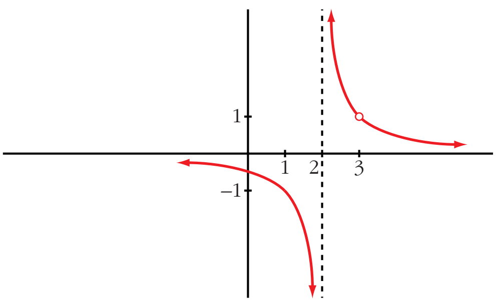
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(0)}.$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



15
S
a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ en los puntos en los que no está definida.

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa la función con la información que obtengas.

c) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \to \quad x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

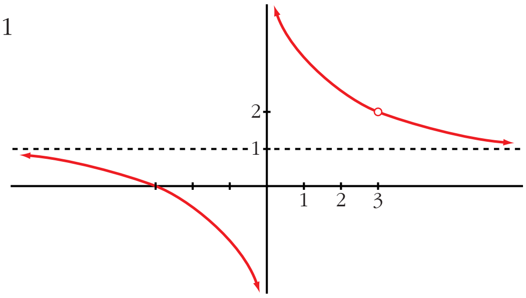
$$y = \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}.$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$



c) La función es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical) y en $x = 3$ (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

16 **Determina el valor de a para que se verifique $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$.**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} = 2 \quad \to \quad a = 4$$

17 **Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2 - 9}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.**

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2 - 9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x - 6}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$; pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$, la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Luego, en $x = 3$, la discontinuidad es evitable.

18
S **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k-x) = k-2 \\[2ex] f(2) = 2+1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k-2=3 \;\;\to\;\; k=5 \end{array}$$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+k) = k \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2-1) = -1 \\[2ex] f(0) = 0+k = k \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k=-1$$

19 S **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3+x^2+x+1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$.

20 **S** **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ &f(2) = 4 + 2a \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\rightarrow\; a = -8\end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \ne -8$.

b) • En $x \ne 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ &f(0) = 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\rightarrow\; a = \dfrac{1}{2}\end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \ne \frac{1}{2}$.

Página 247

21 **S** **Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• Si $x \ne -1$ y $x \ne 1$ $\rightarrow$ la función es continua.

• Si $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ &\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ &f(-1) = 1 \end{aligned}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$. Además:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \end{aligned}\right\} \text{ La discontinuidad es de salto (finito).}$$

22 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2\,500 \rightarrow 100a = 2\,000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

23 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\ &f(0) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ También es continua en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

24 S **En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

a) $\lim\limits_{t \to 8^-} T(t) = \lim\limits_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \dfrac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t - \dfrac{31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \le \dfrac{31}{4} = 7{,}75$ horas.

Por tanto, *no* hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ micras.

25 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b)** $f(x) = |2x - 1| + x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$

a) • Si $x \le 0$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$

• Si $0 < x \le 3$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - x = -2x + 3$

• Si $x > 3$: $|x - 3| - |x| = (x - 3) - x = -3$

Luego: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) • Si $2x - 1 \le 0 \;\to\; x \le \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = -(2x - 1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$

• Si $2x - 1 > 0 \;\to\; x > \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = (2x - 1) + x = 3x - 1$

Luego: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$

c) • Si $x < 0$: $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{-x}$

• Si $x > 0$: $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{x}$

Luego: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x+1}{x} = -1$

26 **S** **Se define la función f del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\[2ex] f(1) = 2 + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \quad \to \quad a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

27 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}\right)\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x) - (1 - x)}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1 + x}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

28 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x + 1} & \text{si } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

29 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función: $y = 2x + \frac{|x|}{x}$**

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, entonces:

$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

CUESTIONES TEÓRICAS

30 S **Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.**

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

$f(x)$ es continua en [0, 2] y $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función toma, en el intervalo [0, 2], todos los valores del intervalo [1, 5].

31 S **Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.**

- Interpretación geométrica: Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo.
- Para las dos funciones dadas, $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$, consideramos la función diferencia: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, también lo es $f(x) - g(x)$.

  Además: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 & \rightarrow \quad f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 & \rightarrow \quad f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Por tanto, existe un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicando el teorema de Bolzano), es decir, $f(c) = g(c)$.

Página 248

32 S **Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.**

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

33 De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1.$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

34 S Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le \quad \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1/2^-} f(x) &= \lim_{x \to 1/2^-} \frac{x - 4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \lim_{x \to 1/2^+} f(x) &= \lim_{x \to 1/2^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{aligned}\right\}$$

$f(x)$ *no* es continua en $x = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

35 S Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.

No lo podemos asegurar. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$ cumple que $f(0) = 3$ y $f(2) = 5$. Sin embargo, no existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 7$, ya que: $f(c) = c + 3 = 7 \rightarrow c = 4 \rightarrow c \notin [0, 2]$.

36 S **Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.**

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

pero la función suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí es continua en $x = 2$.

37 S **¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?: $\textit{sen}\ x + 2x + 1 = 0$**

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Consideramos la función $f(x) = \textit{sen}\ x + 2x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $\textit{sen}\ x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

38 S **Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.**

Consideramos la función $f(x) = x^5 + x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(-1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

39 S **Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.**

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 3, tenemos que:

  — Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; y si

  — $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Por tanto, podemos encontrar k tal que: signo de $f(-k) \neq$ signo de $f(k)$.

Además, $f(x)$ es continua. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-k, k)$.

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 4 no ocurre lo mismo. Por ejemplo, $x^4 + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real; puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x.

40 **S** **Si el término independiente de un polinomio en x es igual a –5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razona que hay algún punto en el intervalo (0, 3) en el que el polinomio toma el valor –2.**

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces es una función continua. El término independiente es igual a –5; es decir, $f(0) = -5$; y, además, $f(3) = 7$. Por tanto, aplicando el teorema de los valores intermedios, como $-5 < -2 < 7$, podemos asegurar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = -2$.

41 **S** **La función $y = tg\ x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

La función $y = tg\ x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$, que está en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

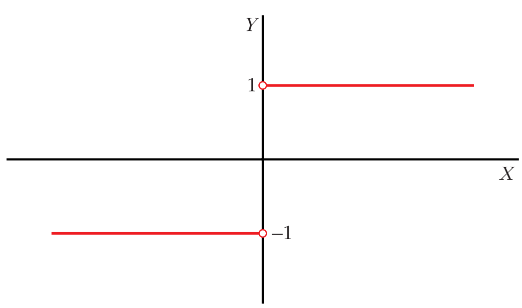
Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano para dicho intervalo.

42 **S** **Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es).

Gráfica:



43 S **Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.**

Si $f(x) > 0$ cuando $x < a$, entonces, si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ha de ser $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$.

Por tanto, podemos asegurar que el límite no es negativo (podría ser positivo o cero).

44 S **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x+1) - ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x+1) - ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln\,(x+1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = ln\;1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln\,(x+1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\,ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = ln\;e = 1$$

45 S **De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.**

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

Consideramos la función $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, entonces $f(a) - g(a) > 0$.
- Si $f(b) < g(b)$, entonces $f(b) - g(b) < 0$.

Es decir, signo $[f(a) - g(a)] \neq$ signo $[f(b) - g(b)]$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$. (Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = c$).

46 S **Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$, $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$?**

- Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$, entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en $[1, 9]$ (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, signo de $g(1) \neq$ signo de $g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$.

47 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

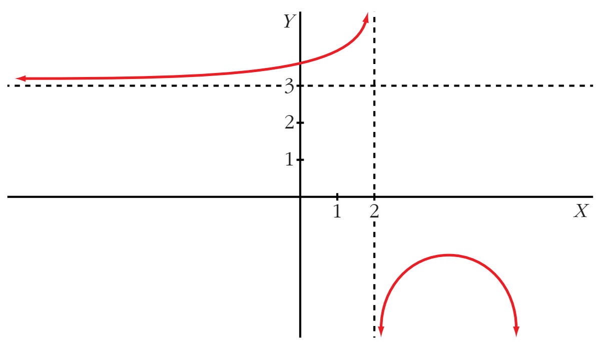
c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.



Página 249

48 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

Sí, puede ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

49 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?**

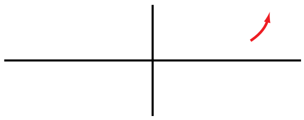
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

50 **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

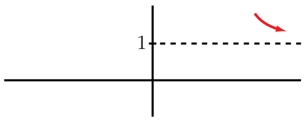
a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$



PARA PROFUNDIZAR

51 **Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - sen\ x$ **b)** $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + sen\ x}{x}$

a) Como $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - sen\ x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) Como $-1 \le \cos x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E[x]}{x} = 1$

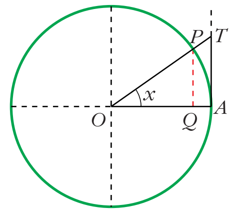
d) Como $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + sen\ x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

52 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1 - x)}$

Como es del tipo 1^∞, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} x^{1/(1 - x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left[(x - 1) \cdot \frac{1}{1 - x}\right]} = e^{\lim\limits_{x \to 1} (-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

53 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo *AOP* de *x* radiantes. Observa que:**



$\overline{PQ} = sen\ x$, $\overline{TA} = tg\ x$ y $arco\ \widehat{PA} = x$

Como:

$\overline{PQ} < \widehat{PA} < \overline{TA} \to \to sen\ x < x < tg\ x.$

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

Tenemos que $sen\ x < x < tg\ x$. Dividiendo entre $sen\ x$, queda:

$$1 < \frac{x}{sen\ x} < \frac{1}{cos\ x} \to 1 > \frac{sen\ x}{x} > cos\ x$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} \geq 1; \text{ es decir: } \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1.$$

54 **Sabiendo que** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$, **calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{x^2}$

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x / cos\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x} \cdot \frac{1}{cos\ x} \right) =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos\ x} = 1 \cdot 1 = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - cos\ x)(1 + cos\ x)}{x^2(1 + cos\ x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2\ x}{x^2(1 + cos\ x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2\ x}{x^2(1 + cos\ x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cos\ x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

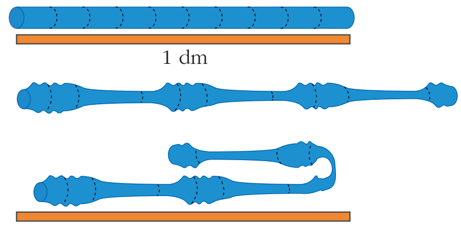
55 **a) Supongamos que *f* es continua en [0, 1] y que $0 < f(x) < 1$ para todo *x* de [0, 1]. Prueba que existe un número *c* de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

☞ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.***

b) Imagina una barra de plastilina de 1 dm de longitud. Se sitúa sobre un segmento de longitud 1 dm. A continuación, deformamos la barrita estirándola en algunos lugares y encogiéndola en otros.

Por último, volvemos a situar la barra deformada *dentro* del segmento, aunque podemos plegarla una o más veces.



Pues bien, podemos asegurar que *algún punto de la barra está exactamente en el mismo lugar en el que estaba.* (*)

— **Llamando x a un punto cualquiera de la barra inicial, construye la gráfica de la función:**

$x \to f(x)$ = posición de x después de la transformación

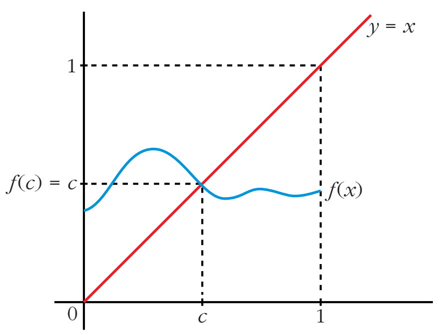
— **Relaciona $f(x)$ con la del apartado a).**

— **Demuestra la afirmación (*).**

a) Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en $[0, 1]$, pues es la diferencia de dos funciones continuas en $[0, 1]$.
- $g(0) = f(0) > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de $[0, 1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$.

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



b) Llamando x a un punto cualquiera de la barra inicial, construimos la función:

$x \;\to\; f(x)$ = "posición de x después de la transformación".

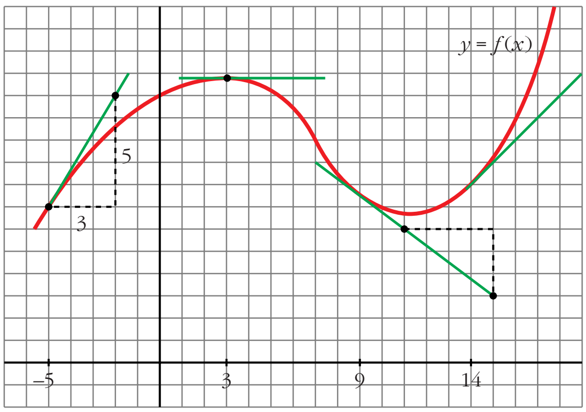
Tenemos que:

- f es continua en $[0, 1]$ (puesto que situamos la barra sobre un segmento de longitud 1 dm y solo la deformamos, no la rompemos).
- $0 < f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$ (ya que situamos la barra deformada *dentro* del segmento).
- Aplicando a $f(x)$ los resultados obtenidos en el apartado a), tenemos que existe c de $(0, 1)$ tal que $f(c) = c$; es decir, existe algún punto de la barra que está exactamente en el mismo lugar que estaba.

9 DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Página 250

Tangentes a una curva



■ **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

$f'(3) = 0$; $f'(9) = \frac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

■ **Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.**

La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

■ **Di otro punto en el que la derivada sea cero.**

La derivada también es cero en $x = 11$.

■ **Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.**

La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

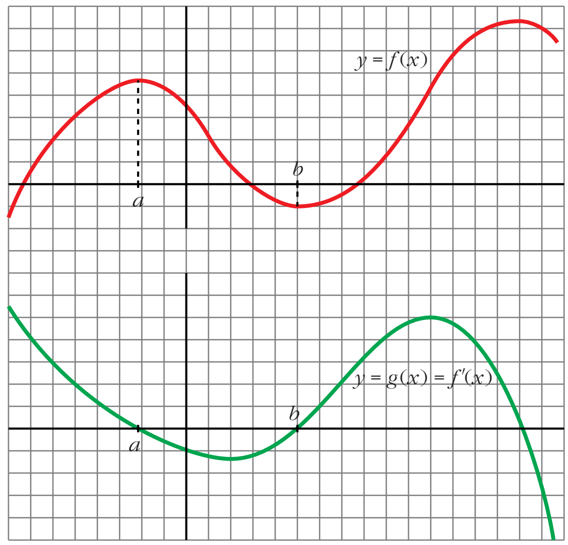
■ **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Página 251

Función derivada

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



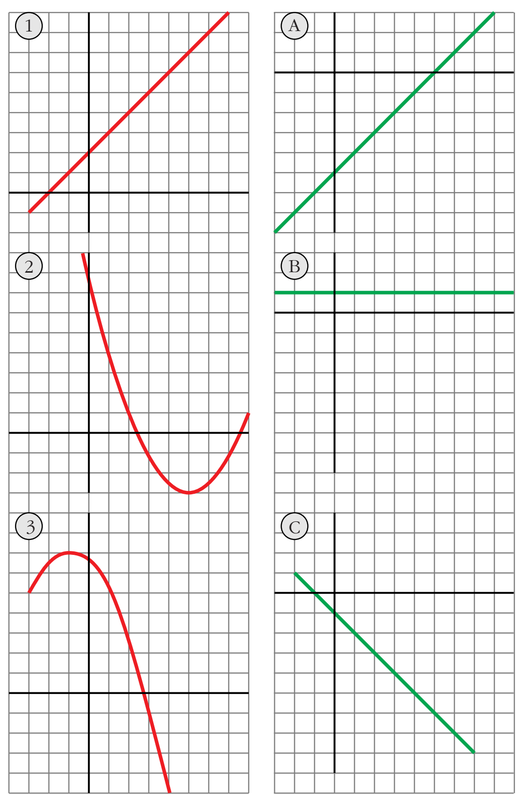
  - En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
  - La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
  - En general:

    $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

    $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

    $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

- **Las tres gráficas de abajo, A, B, y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2, y 3, pero en otro orden. Responde razonadamente cuál es la de cada cual.**



1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

Página 257

1. **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\ sen\sqrt{x}$

l) $f(x) = sen\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x) \cdot (1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}} = ln\,e^{(tg\,x)\,/\,2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)\,/\,2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)\,/\,2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\,3 = \dfrac{ln\,3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2[log\,(sen\,x + log\,(cos\,x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sen\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{sen\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{2sen\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sen\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sen\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\dfrac{sen\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot (-sen\,\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot sen\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}} \cdot (cos\,x + 2x) = \dfrac{cos\,x + 2x}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\,\sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot \left[-sen\,\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3 - x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}} =$

$$= \frac{-2\,cos\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\;sen\sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5 - 2x) \cdot sen\left(2\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}}$$

2. Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\,cos\,x$ **c)** $y = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\;\; y'' = 20x^3;\;\; y''' = 60x^2$

b) $y = x\,cos\,x$

$y' = cos\,x - x\,sen\,x$

$y'' = -sen\,x - sen\,x - x\,cos\,x = -2sen\,x - x\,cos\,x$

$y''' = -2cos\,x - cos\,x + x\,sen\,x = -3cos\,x + x\,sen\,x$

c) $y = sen^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$y' = 1;\;\; y'' = 0;\;\; y''' = 0$

3. Calcula $f'(1)$ siendo: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\,x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\,\sqrt[30]{x^{17}}$$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. **Calcula $f'(\pi/6)$ siendo: $f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$**

$$f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x = cos\, 6x \cdot sen\, 6x = \frac{sen\, 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12cos\, 12x}{2} = 6cos\, 12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\, \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. **Calcula $f'(0)$ siendo: $f(x) = ln\, \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\, tg\, \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$**

$$f(x) = ln\, \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\, ln\, (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{4x^2+4x+1}{3}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Por tanto: $f'(0) = 0$

Página 258

1. **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$**

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f'(x) &= \lim_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim_{x \to 3^+} f'(x) &= \lim_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{aligned}\right\}$$

Las derivadas laterales existen y coinciden.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \;\rightarrow\; m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 259

1. Sabemos que la derivada de la función $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.

Teniendo en cuenta este resultado, halla la derivada de su función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Página 260

1. Comprueba que $sen\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$ pasa por el punto $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y halla la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Sustituimos $x = 2$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ en la expresión:

$$sen\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Se cumple la igualdad. Luego la curva dada pasa por el punto $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Necesitamos obtener el valor de $y'\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Hallamos previamente $y'(x, y)$:

Derivamos $sen\ (x^2y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$:

$$cos\ (x^2y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy\ cos\ (x^2y) + y' \cdot x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'\big(x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2y\big) = -1 - 2xy\ cos\ (x^2y)$$

$$y' = \frac{-1 - 2xy\ cos\ (x^2y)}{x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2y}$$

Por tanto:

$$y'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 - \pi \cdot cos\ \pi}{4\ cos\ \pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2 - 2\pi}{8 + \pi}(x - 2)$

2. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(x) = (sen\ x)^x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g(x) = x^{sen\ x}}$

$$f(x) = (sen\ x)^x \ \rightarrow\ ln\ f(x) = x\ ln\ (sen\ x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\ (sen\ x) + x \cdot \frac{cos\ x}{sen\ x} \ \rightarrow\ f'(x) = (sen\ x)^x \left[ln\ (sen\ x) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x}\right]$$

$$g(x) = x^{sen\ x} \ \rightarrow\ ln\ g(x) = sen\ x \cdot ln\ x$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = cos\ x \cdot ln\ x + sen\ x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^{sen\ x} \cdot \left[cos\ x \cdot ln\ x + \frac{sen\ x}{x}\right]$$

Página 269

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}}$ $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{3x^2}}$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\ 2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

2 **a)** $\boldsymbol{y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3} \dfrac{-2}{(1-x)^{1/3} \cdot (1+x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$

b) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

3 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{\ln x}{x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = 7e^{-x}}$

a) $y' = \dfrac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ b) $y = -7e^{-x}$

4 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$ **b)** $\boldsymbol{y = sen\, x \cos x}$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-sen\, x) \cdot sen\, x = \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$

5 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{sen\, x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \ln(x^2 + 1)}$

a) $y' = \dfrac{-\cos x}{sen^2 x}$ b) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

6 **a)** $\boldsymbol{y = arc\ tg \dfrac{x}{3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \cos^2 (2x - \pi)}$

a) $y' = \dfrac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1 + x^2/9} = \dfrac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2\cos(2x - \pi) \cdot \big(-sen\,(2x - \pi)\big) \cdot 2 = -4\cos(2x - \pi) \cdot sen\,(2x - \pi) =$

$= -2\cos(4x - 4\pi)$

7 **a)** $\boldsymbol{y = sen^2 x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\, x}}$

a) $y' = 2sen\, x \cdot \cos x = sen\, 2x$ b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\, x}} \cdot (1 + tg^2 x) = \dfrac{1 + tg^2 x}{2\sqrt{tg\, x}}$

8 **a)** $\boldsymbol{y = sen\, x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\, tg\, (x^2 + 1)}$

a) $y' = cos\, x^2 \cdot 2x = 2x\, cos\, x^2$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

9 **a)** $\boldsymbol{y = (2\sqrt{x} - 3)^7}$ **b)** $\boldsymbol{y = log_2 \sqrt{x}}$

a) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\, ln\, 2}$

10 **a)** $\boldsymbol{y = sen^2\, x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\, tg\, \dfrac{1}{x}}$

a) $y' = 2sen\, x^2 \cdot cos\, x^2 \cdot 2x = 4x\, sen\, x^2\, cos\, x^2 = 2x\, sen\, (2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

11 **a)** $\boldsymbol{y = cos^5\, (7x^2)}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3^x + 1}$

a) $y' = 5cos^4\, (7x^2) \cdot \big(-sen\, (7x^2)\big) \cdot 14x = -70x\, cos^4\, (7x^2)\, sen\, (7x^2)$

b) $y' = 3^x\, ln 3$

12 **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{(5x - 3)^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\, sen\, \dfrac{x^2}{3}}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}(5x - 3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x - 3}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x/3}{\dfrac{\sqrt{9 - x^4}}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

13 **a)** $\boldsymbol{y = ln(2x - 1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = tg\, \dfrac{x^2}{2}}$

a) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2\, \dfrac{x^2}{2}\right) \cdot \dfrac{2x}{2} = x + x\, tg^2\, \dfrac{x^2}{2}$

14 **a)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = \arccos \sqrt{2x}$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{2x})^2}} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 - 2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}$

15 **a)** $y = \ln \sqrt{1 - x}$ **b)** $y = (\mathrm{arc\,tg}\, x)^2$

a) $y = \ln \sqrt{1 - x} = \ln (1 - x)^{1/2} = \dfrac{1}{2} \ln (1 - x)$

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(1 - x)} = \dfrac{-1}{2 - 2x}$

b) $y' = 2(\mathrm{arc\,tg}\, x) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{2\, \mathrm{arc\,tg}\, x}{1 + x^2}$

16 **a)** $y = \log_3 (7x + 2)$ **b)** $y = \ln \mathrm{tg} \dfrac{3}{x}$

a) $y' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{7}{(7x + 2)} = \dfrac{7}{(7x + 2) \ln 3}$

b) $y' = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, 3/x} \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2 \dfrac{3}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\,(1 + \mathrm{tg}^2\, 3/x)}{x^2\, \mathrm{tg}\, 3/x}$

17 **a)** $y = e^{4x}$ **b)** $y = \ln \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \dfrac{1}{\ln 1/x} \cdot \dfrac{1}{1/x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x \ln 1/x}$

18 **a)** $y = 2^x$ **b)** $y = \mathrm{arc\,sen} \dfrac{x + 1}{x - 1}$

a) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2}} \cdot \dfrac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}}{x - 1}} \cdot \dfrac{-2}{(x - 1)^2} =$

$= -\dfrac{2/(x - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}} = \dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1 - 2x - x^2 - 1 - 2x}} = -\dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{-4x}}$

19 **a)** $\boldsymbol{y = 5\,tg^3 (3x^2 + 1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

a) $y' = 15\,tg^2\,(3x^2 + 1) \cdot [1 + tg^2\,(3x^2 + 1)] \cdot 6x = 90x\,[tg^2\,(3x^2 + 1) + tg^4\,(3x^2 + 1)]$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

20 **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\,x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\dfrac{x - 2}{x + 2}}}$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\,x^2}}(1 + tg^2\,x^2) \cdot 2x = \dfrac{x(1 + tg^2\,x^2)}{\sqrt{tg\,x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^{-2/3} \cdot \dfrac{x + 2 - (x - 2)}{(x + 2)^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^2}} \cdot \dfrac{4}{(x + 2)^2} =$

$= \dfrac{4}{3 \cdot (x + 2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{(x + 2)^{2/3}}} = \dfrac{4}{3(x + 2)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{(x - 2)^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(x + 2)^4\,(x - 2)^2}} =$

$= \dfrac{4}{3(x + 2)\sqrt[3]{(x + 2)(x - 2)^2}}$

21 **a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla** $\boldsymbol{f'(0)}$**,** $\boldsymbol{f'(3)}$ **y** $\boldsymbol{f'(1)}$**:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $\boldsymbol{f'(x) = 5}$**?**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Si** $\boldsymbol{x \neq 1}$**,** la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $\boldsymbol{x = 1}$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Luego, $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \geq 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \to \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

22 **Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la función es continua y derivable.

- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} f \text{ es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen pero no coinciden.}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

23 **Estudia la continuidad y derivabilidad de estas funciones:**

$$\textbf{a)}\ f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$,** la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) **Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$,** $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden.

$f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2 \;\to\; f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

24 **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

a) $\boldsymbol{y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x\,tg\,x)^2}$

c) $\boldsymbol{y = ln\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\right)}$ **d)** $\boldsymbol{y = ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1+x)^2}}}$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1-x) - ln\,(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$$

b) $y = ln\,(x\,tg\,x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\,x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{tg\,x} + tg\,x\right] = \frac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2\,tg\,x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\right) = -2ln\,x + \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2-1)$

$$y' = \frac{-2}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{3x^2-3} = \frac{-6x^2+6+2x^2}{3x^3-3x} = \frac{-4x^2+6}{3x^3-3x}$$

d) $y = ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1 + x)^2}} = \dfrac{1}{3}\,[ln\ 1 - ln\ (1 + x)^2] = \dfrac{-2}{3}\ ln\ (1 + x)$

$y' = \dfrac{-2}{3} \cdot \dfrac{1}{(1 + x)} = \dfrac{-2}{3 + 3x}$

25 **Calcula la derivada de estas funciones implícitas:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

e) $x^3 + y^3 + 2xy = 0$

f) $\dfrac{(x - 1)^2}{8} + \dfrac{(y + 3)^2}{14} = 1$

a) $2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$y'(2y - 6) = 4 - 2x$

$y' = \dfrac{4 - 2x}{2y - 6} = \dfrac{2 - x}{y - 3}$

c) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{x}{8} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{2yy'}{9} = -\dfrac{x}{8} \rightarrow 2yy' = \dfrac{-9x}{8} \rightarrow y' = \dfrac{-9x}{16y}$

d) $\dfrac{2x}{9} - \dfrac{2yy'}{25} = 0 \rightarrow \dfrac{2yy'}{25} = \dfrac{2x}{9}$

$y' = \dfrac{25x}{9y}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $\dfrac{2(x-1)}{8} + \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{(x-1)}{4} + \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$\dfrac{(y+3)y'}{7} = -\dfrac{(x-1)}{4} \quad \to \quad (y+3)y' = \dfrac{7(1-x)}{4}$

$y' = \dfrac{7-7x}{4y+12}$

Página 270

26 Aplica la derivación logarítmica para derivar:

a) $y = x^{3x}$ **b)** $y = x^{x+1}$

c) $y = x^{e^x}$ **d)** $y = (ln\ x)^{x+1}$

e) $y = \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^x$ **f)** $y = x^{tg\ x}$

a) $y = x^{3x} \quad \to \quad ln\ y = 3x\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = 3\ ln\ x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3\ ln\ x + 3$

$y' = x^{3x}(3ln\ x + 3)$

b) $y = x^{x+1} \quad \to \quad ln\ y = (x+1)\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = ln\ x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}$

$y' = x^{x+1}\left(ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $y = x^{e^x} \quad \to \quad ln\ y = e^x \cdot ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = e^x \cdot ln\ x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

$y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $y = (ln\ x)^{x+1} \quad \to \quad ln\ y = (x+1) \cdot ln\ (ln\ x)$

$\dfrac{y'}{y} = ln\ (ln\ x) + (x+1) \cdot \dfrac{1}{ln\ x} \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ (ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}$

$y' = (ln\ x)^{x+1} \cdot \left[ln\ (ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}\right]$

e) $y = \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^x \ \rightarrow \ ln\ y = x\ ln\left(\dfrac{sen\ x}{x}\right) = x\,\big(ln\ (sen\ x) - ln\ x\big)$

$$\frac{y'}{y} = ln\ (sen\ x) - ln\ x + x\left(\frac{cos\ x}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1$$

$$y' = \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1\right]$$

f) $y = x^{tg\ x} \ \rightarrow \ ln\ y = tg\ x \cdot ln\ x$

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\ x) \cdot ln\ x + tg\ x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{tg\ x} \cdot \left[(1 + tg^2\ x)\ ln\ x + \frac{tg\ x}{x}\right]$$

27 **Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:**

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.

II) Aplicando la derivación logarítmica.

a) $\boldsymbol{y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$

c) $\boldsymbol{y = sen^3\ x\ cos^2\ x}$ **d)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2+1}\ \sqrt[3]{x^2}}$

a) I) $y' = 3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$

II) $ln\ y = 3\big(ln\ (x^2+1) - ln\ x\big)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2+1)}\right) = \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)} = \frac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$

II) $ln\ y = \dfrac{1}{2}\ [ln\ (1+x) - ln\ (1-x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sen^2\, x \cos x \cdot \cos^2 x + sen^3\, x \cdot 2\cos x\,(-sen\, x) =$

$= 3sen^2\, x \cos^3 x - 2\cos x\, sen^4\, x$

II) $\ln y = 3\ln\,(sen\, x) + 2\ln\,(\cos x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{\cos x}{sen\, x} + 2 \cdot \frac{-sen\, x}{\cos x} = \frac{3\cos^2 x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cos x}$$

$$y' = sen^3\, x \cos^2 x \cdot \frac{3\cos^2 x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cos x} = sen^2\, x \cos x\,(3\cos^2 x - 2sen^2\, x) =$$

$= 3sen^2\, x \cos^3 x - 2\cos x\, sen^4\, x$

d) I) $$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $\ln y = \frac{1}{2}\ln\,(x^2+1) + \frac{2}{3}\ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

28 **Utilizando la definición de derivada, calcula: $f'(-2)$, siendo $f(x) = \frac{1}{x}$**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{-2+h} - \frac{1}{-2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 - 2 + h}{-4 + 2h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(-4+2h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-4+2h} = \frac{-1}{4} = f'(-2)$$

29 **Halla la función derivada de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ aplicando la definición de derivada.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x+h-1}{x+h+1} - \frac{x-1}{x+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+1)(x+h-1) - (x-1)(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x} + h - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x} + h + \cancel{1}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

30 **Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ **b)** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$ **f)** $y = sen\ x + cos\ x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \ \rightarrow \ 3 - x = 0 \ \rightarrow \ x = 3 \ \rightarrow \ y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \ \rightarrow \ y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 8x = 0 \ \rightarrow \ x(3x-8) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \ \rightarrow \ y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \ \rightarrow \ 2x^2 - 2 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = 1 \ \begin{cases} x = 1 \ \rightarrow \ y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \ \rightarrow \ y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$y' = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \ \rightarrow \ 2x + x^2 = 0 \ \rightarrow \ x(2+x) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \\ x = -2 \ \rightarrow \ y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \operatorname{sen} x \;\rightarrow\; \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\,\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

31 **Comprueba que la función $y = |x - 2|$ no es derivable en $x = 2$.**

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua, pues: $\lim\limits_{x \to 2^-} (-x + 2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = f(2) = 0$

Las derivadas laterales son: $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 2$.

32 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$y = |x^2 + 6x + 8|$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \;\rightarrow\; y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \;\rightarrow\; y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

33
S
Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, halla: $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

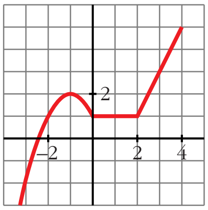
$f'(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x\, e^{\operatorname{sen} x} = (\cos^2 x - \operatorname{sen} x)\, e^{\operatorname{sen} x}$

$$f'''(x) = (2\cos x(-\operatorname{sen} x) - \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x} + (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) \cos x\, e^{\operatorname{sen} x} =$$
$$= (-2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \cos^3 x - \operatorname{sen} x \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x} =$$
$$= (\cos^3 x - 3\operatorname{sen} x \cos x - \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x}$$

34 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola: $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$**

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

35 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

36 **Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = 4 \ln x - x^3 + 1$ en el punto $x = 1$.**

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{4}{x} - 3x^2 \quad \rightarrow \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{x^2} - 6x \quad \rightarrow \quad f''(1) = -10$$

$$f'''(x) = \frac{8}{x^3} - 6 \quad \rightarrow \quad f'''(1) = 2$$

PARA RESOLVER

37 S **Considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$**

a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- **Si $x \neq 1$,** la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser: $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$,** la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \;\;\to\;\; x = \frac{5}{2}; \;\text{pero}\; \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \;\;\to\;\; x = -\frac{1}{2}; \;\text{pero}\; -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

38 **Prueba que la función $f(x) = x + |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$.**

$$f(x) = \left\{\begin{matrix} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \neq f'(3^+) = 2$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

39
S **Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)\,e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; x^2 - 2x + k = 0 \;\;\to\;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser $4 - 4k = 0$; es decir, $k = 1$.

40
S **Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.**

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\to$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

41 S **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.

• **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$; o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$:**

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\;\rightarrow\;\; 2a = 4 \;\;\rightarrow\;\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

Página 271

42 **S** **Sea la función: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

a) Halla $f'(x)$.

b) Halla $f''(x)$.

c) Representa f' y f''.

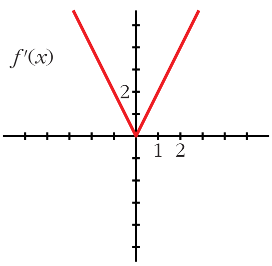
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

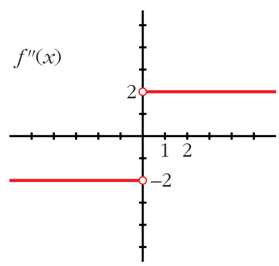
En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, pues $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

c)





43 **S** **Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ y calcula $f'(1)$.**

$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

$f'(1) = \dfrac{-2}{3}$

44 **Halla el valor de la derivada de la función: $\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=0$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.**

Derivamos:

$$-\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y')+\cos(x-y)\cdot(1-y')=0$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)-y'\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x-y)-y'\cos(x-y)=0$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x-y)=y'\left(\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x-y)\right)$$

$$y'=\frac{-\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x-y)}$$

Calculamos la derivada en el punto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1+1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

45 **S** **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x)=e^{2x}$.**

$$f'(x)=2e^{2x}$$
$$f''(x)=4e^{2x}=2^2e^{2x}$$
$$f'''(x)=8e^{2x}=2^3e^{2x}$$
$$\dots$$
$$f^n(x)=2^ne^{2x}$$

Lo demostramos por inducción:

Para $n=1$, $n=2$, $n=3$, vemos que se cumple.

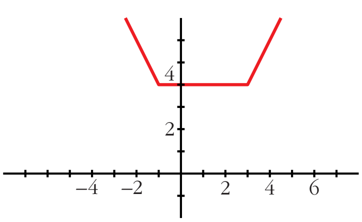
Supongamos que es cierto para $n-1$; es decir, que $f^{n-1}(x)=2^{n-1}e^{2x}$; entonces, derivando, tenemos que: $f^n(x)=2\cdot 2^{n-1}e^{2x}=2^ne^{2x}$. Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo n.

46 **a) Representa la función siguiente: $f(x)=|x+1|+|x-3|$**

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

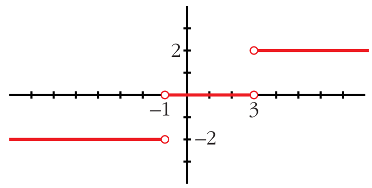
b) Representa $f'(x)$.

a) $f(x)=\left\{\begin{array}{lll}-x-1-x+3 & \text{si} & x<-1\\ x+1-x+3 & \text{si} & -1\le x\le 3\\ x+1+x-3 & \text{si} & x>3\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{lll}-2x+2 & \text{si} & x<-1\\ 4 & \text{si} & -1\le x\le 3\\ 2x-2 & \text{si} & x>3\end{array}\right.$



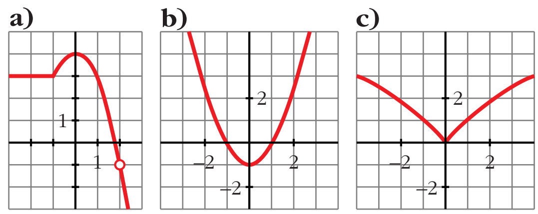
No es derivable en $x=-1$ ni en $x=3$. (Son puntos “angulosos”).

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



47 **S** **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

48 **S** **La función $f(x)$ está definida por:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

49 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Represéntala gráficamente.

Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos en los que $f'(x) = 0$:

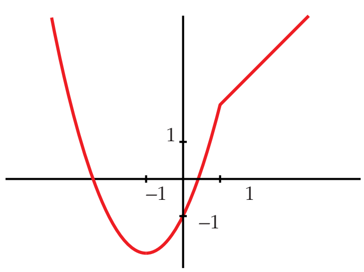
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

Gráfica de $f(x)$:



50 **S** **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \ne -1$ y $x \ne 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.

- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$, es decir: $b = 2a - 2$.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $b = 2$.

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

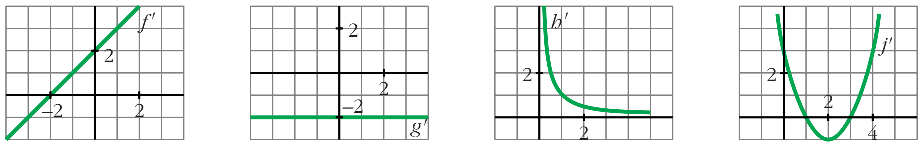
- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \ne f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

51 **S** **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

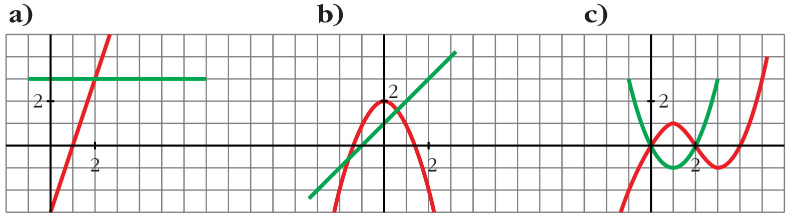
g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

52 **¿Cuál de estas gráficas representa la función f y cuál su derivada f'? Justifica tu respuesta.**

a) **b)** **c)**



a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera es válida.

53 **S** **Halla los puntos de derivada nula de la función $y = (3x - 2x^2)\, e^x$.**

$y' = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 - x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

54 **Dada la función $f(x) = e^x + ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \;\rightarrow\; f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1 - x)^2} \;\rightarrow\; f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1 - x)^3} \;\rightarrow\; f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

55 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{array} \right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$ no es continua (ni derivable), pues no está definida.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.

- **En $x = 0$:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\}$$

No es continua en $x = 0$ (tiene una discontinuidad evitable).

• **En $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3).$$ La función es continua en $x = 3$.

• **En $x = -3$:** *No* es continua, pues no está definida.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es derivable. Además: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$

• **En $x = 0$ y en $x = -3$:** *No* es derivable, pues no es continua.

• **En $x = 3$:** *Sí* es derivable, pues $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

56 S **Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad

• **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

57 **S** **Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

Veamos si es derivable:

- **Si $x \neq 0$,** tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No existen las derivadas laterales en $x = 0$. Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en $x = 0$.

58 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$, la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

• **En $x = -1$ y en $x = 1$:** No es continua, pues no está definida en estos puntos.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = -1$ y en $x = 1$:** No es derivable, pues no está definida la función.

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$. No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

59 **Prueba que** $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x}) \cdot 2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

60 **Demuestra que la derivada de la función** $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ **con** $0 \le x \le \pi$ **es una constante.**

Recuerda la fórmula de $tg\ \dfrac{x}{2}$.

Si $0 \le x \le \pi \ \rightarrow \ 0 \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{2} \ \rightarrow \ tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Así: $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = arc\ tg \left(tg\ \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

Por tanto: $y' = \dfrac{1}{2}$

61 **Si** $f(x) = x^2|x|$, **halla** f', f'' **y** f'''.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } \ x < 0 \\ x^3 & \text{si } \ x \ge 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } \ x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } \ x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } \ x < 0 \\ 6x & \text{si } \ x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } \ x < 0 \\ 6 & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \ne f'''(0^+) = 6$).

62 **Halla los puntos de derivada nula de la función $y = \cos 2x - 2\cos x$.**

$y' = -\operatorname{sen} 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x =$

$= -2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\operatorname{sen} x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 + k \cdot \pi$

$-2\cos x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k & ; \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$

CUESTIONES TEÓRICAS

63 **Sabes que** $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Llamando $h = x - x_0$, tenemos que:

- Si $h \to 0$, entonces $x \to x_0$.
- Además, $x_0 + h = x$

Por tanto: $\displaystyle f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

64 **Relaciona los siguientes límites con la derivada de las funciones que aparecen en ellos:**

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

65 **S** **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener?**

¿Es posible que no tenga ninguno?

¿Es posible que solo tenga uno?

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

Por ejemplo:

$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}\;$ Dos puntos

$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Un punto

$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$ para todo $x \;\rightarrow\;$ Ninguno

66 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

67 **¿Puede haber dos funciones que tengan la misma derivada? Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 2x$.**

Sí. Por ejemplo, si $f'(x) = 2x$, podemos considerar: $f(x) = x^2 + k$, siendo k una constante cualquiera.

68 **S** **Dadas $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = 3x$, calcula:**

a) $f'(3x)$ **b)** $(f \circ g)'(x)$

c) $g'[f(x)]$ **d)** $(g \circ f)'(x)$

$f'(x) = 2(x + 1) = 2x + 2; \;\; g'(x) = 3$

a) $f'(3x) = 2 \cdot 3x + 2 = 6x + 2$

b) $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = (2 \cdot 3x + 2) \cdot 3 = 18x + 6$

c) $g'[f(x)] = 3$

d) $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 3(2x + 2) = 6x + 6$

69 **La función $y = \sqrt{x^2 - 4x}$, ¿tiene algún punto de derivada nula?**

¿Y la función $y = \sqrt{4x - x^2}$?

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \to \quad \textit{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Pero $x = 2$ no pertenece al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

Para la otra función:

$$y = \sqrt{4x - x^2} \quad \to \quad \textit{Dominio} = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \quad \to \quad x = 2 \text{ (Sí pertenece al dominio)}$$

La derivada se anula en $x = 2$.

PARA PROFUNDIZAR

70 **Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = sen\ 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.**

$$f^{\mathrm{I}}(x) = 2cos\ 2x$$

$$f^{\mathrm{II}}(x) = -4sen\ 2x = -2^2 \cdot sen\ 2x$$

$$f^{\mathrm{III}}(x) = -8cos\ 2x = -2^3 \cdot cos\ 2x$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 16sen\ 2x = 2^4 \cdot sen\ 2x$$

…

En general, las derivadas de orden par son de la forma: $f^{(n)}(x) = k \cdot sen\ 2x$, donde k es constante.

Por tanto, se anulan todas en $x = 0$, puesto que $sen\ 0 = 0$. Como $f(0) = 0$, tenemos que todas las derivadas de orden par de $f(x)$ se anulan en el origen de coordenadas.

Página 273

71 **Dada $y = sen\ x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

La cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tiene pendiente: $m = \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Tenemos que hallar un punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la derivada de la función sea igual a $\frac{2}{\pi}$:

$$\left.\begin{array}{l} y' = cos\, x = \dfrac{2}{\pi} \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = 0{,}88$$

72 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función:**

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h\sqrt{1 - (1 + h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sqrt{1 - (1 + h)^2}\right) = 0 = f'(1)$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h)\sqrt{2h - h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left((2 - h)\sqrt{\frac{2h - h^2}{h^2}}\right) = \lim_{h \to 0} (2 - h)\sqrt{\frac{(2 - h)}{h}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{0} \quad \rightarrow \quad \text{no existe } f'(-1)$$

73 **Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:**

$f(0) = 5$; $f'(0) = 6$; $f'(1) = 3$

$g(0) = 1$; $g'(0) = 4$; y $g'(5) = 2$

Prueba que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen la misma derivada en $x = 0$.

Aplicamos la regla de la cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

74
S

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\, x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

Continuidad: Debe cumplirse que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\ x}{x} + 2\right) = 1 + 2 = 3 \\ f(0) = k \end{array}\right\}$$

La función será continua en $x = 0$ si $k = 3$.

75 **Halla la derivada *n*-ésima de las funciones siguientes:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = ln(1 + x)$

a) $y' = a\, e^{ax};\ \ y'' = a^2\, e^{ax};\ \ y''' = a^3\, e^{ax};\ \ \dots\ \ y^{n)} = a^n\, e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1}\, e^{ax}$, derivando obtenemos: $y^{n)} = a \cdot a^{n-1}\, e^{ax} = a^n\, e^{ax}$, como queríamos demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\ \ y'' = \dfrac{2}{x^3};\ \ y''' = \dfrac{-6}{x^4};\ \dots\ \ y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$, como queríamos demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\ \ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\ \ y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \dots\ \ y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo probamos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivando, obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$, como queríamos demostrar.

76 **Considera la función:** $f(x) = \begin{cases} x^n\, sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **siendo n un número natural.**

a) Demuestra que f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) Demuestra que f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2\, sen\,(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h\, sen\left(\dfrac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$

(*) Tenemos en cuenta que $-1 \leq sen\left(\dfrac{1}{h}\right) \leq 1$.

Por tanto, f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) $f'(0) = \lim \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim \dfrac{h\ sen\ (1/h) - 0}{h} = \lim\ sen \left(\dfrac{1}{h}\right)$

Este límite no existe (el valor de $sen\left(\dfrac{1}{h}\right)$ va oscilando entre –1 y 1).

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

77 **Prueba que existe un punto de la curva: $f(x) = e^x + arc\ tg\ x$ cuya tangente (en ese punto) es paralela a la recta $y = 3x + 2$.**

☞ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $f'(x) - 3$.***

La pendiente de la recta $y = 3x + 2$ es $m = 3$.

Tenemos que probar que existe un punto de la curva $f(x)$ tal que $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = 3$$

Consideramos la función $G(x) = f'(x) - 3$; es decir:

$$G(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} - 3$$

Tenemos que: $\begin{cases} G(0) = -1 < 0 \\ G(1) = e - \dfrac{5}{2} \approx 0{,}22 > 0 \\ G(x) \text{ es una función continua en } [0, 1] \end{cases}$

Aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $G(c) = 0$. Es decir, $f'(c) - 3 = 0$; o bien $f'(c) = 3$, como queríamos probar.

78 **Comprueba en cada caso que $f(x)$ verifica la ecuación indicada:**

a) $f(x) = e^x\ sen\ x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln\ \dfrac{1}{x + 1}$

$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

a) $f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x\ cos\ x$

$f''(x) = \cancel{e^x\ sen\ x} + e^x\ cos\ x + e^x\ cos\ x - \cancel{e^x\ sen\ x} = 2e^x\ cos\ x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x\ cos\ x - 2e^x\ sen\ x - 2e^x\ cos\ x + 2e^x\ sen\ x = 0$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

De otra forma:

$f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x\ cos\ x = f(x) + e^x\ cos\ x$

$f''(x) = f'(x) + e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x + e^x\ sen\ x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + (e^x\ sen\ x + e^x\ cos\ x) - 2(e^x\ sen\ x) =$

$= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln\ 1 - ln\ (x + 1) = -ln(x + 1)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x+1}$

$xf'(x) + 1 = \dfrac{-x}{x+1} + 1 = \dfrac{-x + x + 1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} = e^{ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{f(x)}$

Por tanto: $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$

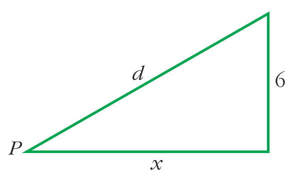
PARA PENSAR UN POCO MÁS

79 **Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto *P* y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a *P* es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.**

Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.

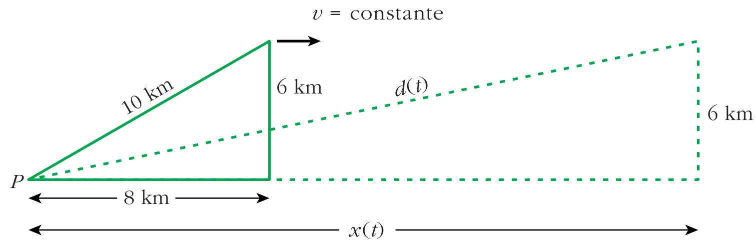
Pasos:

a) Expresa *d* en función de *x*:



b) Obtén la expresión de la velocidad de alejamiento de *P*, $d'(t)$, en función de *x* y de $x'(t)$.

c) Despeja $x'(t_0)$ siendo t_0 el instante al que se refiere el enunciado y, por tanto, para el que conocemos algunos datos numéricos. $x'(t_0)$ es la velocidad del avión en ese instante y, por tanto, su velocidad constante.



a) $d = \sqrt{x^2 + 36}$

b) $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$

$$d'(t) = \frac{2x(t)\, x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

c) $x'(t_0) = \dfrac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \dfrac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$ km/min

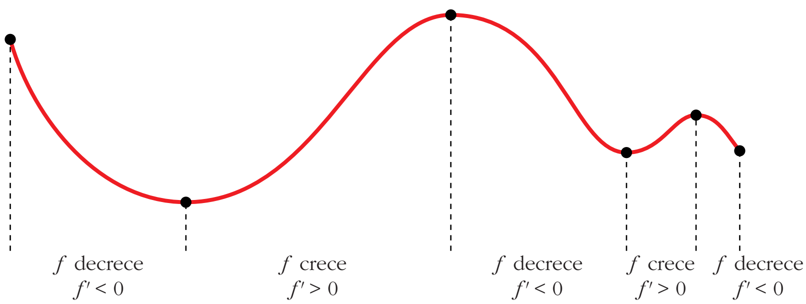
El avión va a 7,5 km/min; es decir, a 450 km/h.

10 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Página 274

Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

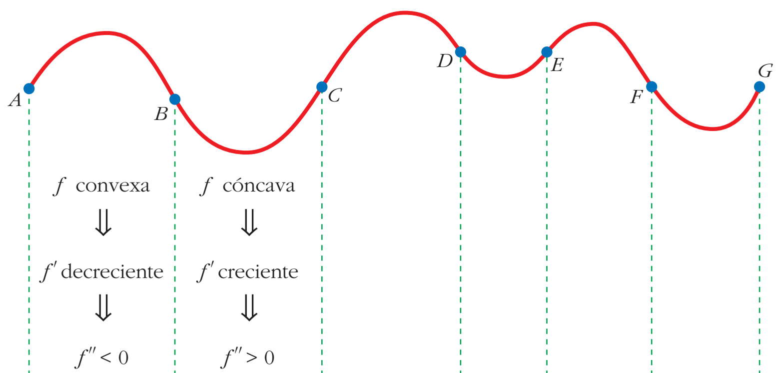
■ **Analiza la curva siguiente:**



Página 275

Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



$CD \;\rightarrow\; f$ convexa $\;\rightarrow\; f'$ decreciente $\;\rightarrow\; f'' < 0$

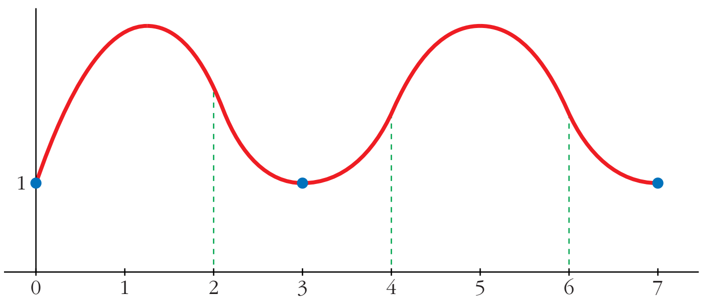
$DE \;\rightarrow\; f$ cóncava $\;\rightarrow\; f'$ creciente $\;\rightarrow\; f'' > 0$

$EF \;\rightarrow\; f$ convexa $\;\rightarrow\; f'$ decreciente $\;\rightarrow\; f'' < 0$

$FG \;\rightarrow\; f$ cóncava $\;\rightarrow\; f'$ creciente $\;\rightarrow\; f'' > 0$

■ **Dibuja la gráfica de una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



Página 276

1. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. **Halla las rectas tangentes a la circunferencia:**

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0}$$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

Obtención de las ordenadas correspondientes:

$$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$$

$$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (3, 3) \\ y = -7 & \rightarrow \quad \text{Punto } (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en esos puntos, derivamos implícitamente:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$$

$$y'(2y + 4) = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2y + 4} = \frac{1 - x}{y + 2}$$

Así: $y'(3, 3) = -\frac{2}{5}$; $y'(3, -7) = \frac{2}{5}$

- **Recta tangente en (3, 3):** $y = 3 - \frac{2}{5}(x - 3) = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$
- **Recta tangente en (3, –7):** $y = -7 + \frac{2}{5}(x - 3) = \frac{2}{5}x - \frac{41}{5}$

Página 277

1. **Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:**

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \rightarrow y' < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 279

2. **Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de ellos estudiando el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \quad \to \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo}$$

3. a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

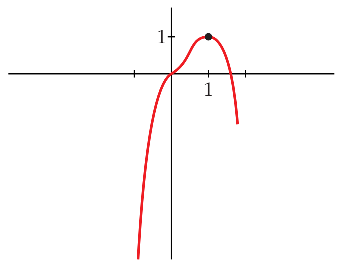
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 1 \quad \to \quad \text{Punto } (1,\ 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1;\ 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0,\ 0)$ hay un *punto de inflexión*.
- En $(1,\ 1)$ hay un *máximo relativo*.



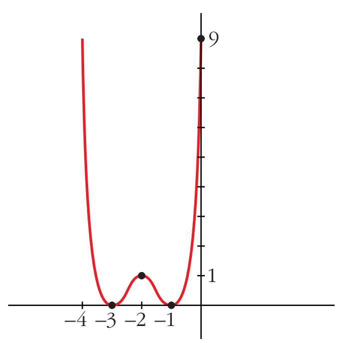
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \to \quad \text{Punto } (-1,\ 0) \\ x = -2 \quad \to \quad \text{Punto } (-2,\ 1) \\ \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4,\ 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un *mínimo relativo* en $(-3,\ 0)$, un *máximo relativo* en $(-2,\ 1)$ y un *mínimo relativo* en $(-1,\ 0)$.



Página 281

1. Estudia la curvatura de la función: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\ f'''(0) \neq 0;\ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 2)$$
$$\left(f'''(x) = 6;\ f'''(2) \neq 0\right)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 283

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

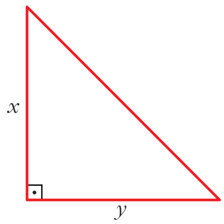
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \rightarrow f(5) = 10 \\ x = -5 \ \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$x + y = 10 \quad \to \quad y = 10 - x$

$\text{Área} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$

Tenemos que maximizar la función:

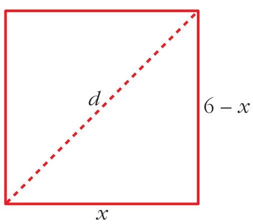
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \to \quad x = 5 \quad \to \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \dfrac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego, en } x = 5 \text{ está el máximo} \right).$

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

Tenemos que minimizar la función:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

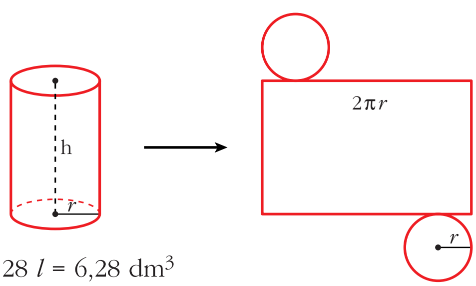
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6 + 2x = 0 \quad \to \quad x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego, en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$\text{Área total} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 =$

$= 2\pi r(\text{h} + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h = 6{,}28 \;\rightarrow\; h = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = h$

Así: $\textit{Áreal total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \;\rightarrow\; h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 284

1. Calcula, aplicando L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x\,(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x(1 + cos\, x) + sen\, x(-sen\, x)}{cos\, x + x(-sen\, x)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{cos\, x} = 2$

2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{-x} + 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Página 285

3. Aplica L'Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

Para poner $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln[f(x)]\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x)\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{sen} x + \cos x)/(\cos x + \operatorname{sen} x)}{1} = 1 \quad \to \quad \lim_{x \to 0} f(x) = e^1 = e$$

4. Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 2}{(-1/x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2^{1/x} \cdot \ln 2) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

Página 286

1. a) Explica por qué $y = \operatorname{sen} x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$.

b) ¿En qué punto se verifica la tesis del teorema de Rolle?

a) $y = \operatorname{sen} x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

b) $\left.\begin{array}{l} y' = \cos x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array}\right\} \to \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Página 288

2. Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ en } [-2, -1]$$

Calcula el valor correspondiente a c.

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - 12}{-1 + 2} = -6$$

$$f'(x) = 2x - 3 = -6 \quad \to \quad x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{-3}{2}$.

3. Repite el ejercicio anterior para la función $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{0 - (-9)}{-1 + 2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \quad \to \quad 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 120}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{3} \begin{cases} x \simeq 2{,}19 \\ x \simeq -1{,}52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \dfrac{1 - \sqrt{31}}{3}$.

4. Demuestra que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x - 3) = 5 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\[2ex] f(4) = 5 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego, $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 6]$. (Para $x \neq 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en $(2, 6)$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \quad \to \quad -2x + 10 = 1 \quad \to \quad x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

5. Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b. (Hazlo por reducción al absurdo: empieza suponiendo que hay dos raíces en ese intervalo).

- $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

  La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

- Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en $[-1, 1]$, sean c_1 y c_2. Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

  Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2), pues $-1 \le c_1, c_2 \le 1$.

  Hemos llegado a una contradicción.

- Por tanto, $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera que sea el valor de b.

6. Calcula p, m y n para que:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ mx + n & \text{si } \ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 5]. ¿Dónde cumple la tesis? Represéntala.

- Si $x \ne 3$, la función es continua, pues está formada por polinomios. Su dominio es $[-1, 5]$.

- En $x = 3$, para que sea continua, ha de ser:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (-x^2 + px) = -9 + 3p \\ &\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (mx + n) = 3m + n \\ &f(3) = 3m + n = -9 + 3p \end{aligned}\right\} \quad -9 + 3p = 3m + n$$

• Si $x \in (-1, 5)$ y $x \neq 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } -1 < x < 3 \\ m & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

• Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -6 + p \\ f'(3^+) = m \end{array}\right\} \; 6 + p = m$$

• Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, además, debe tenerse que $f(-1) = f(5)$; es decir:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = -1 - p \\ f(5) = 5m + n \end{array}\right\} \; -1 - p = 5m + n$$

• Uniendo las tres condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} -9 + 3p = 3m + n \\ -6 + \;\; p = m \\ -1 - \;\; p = 5m + n \end{array}\right\} \; m = -\frac{8}{3}; \;\; n = 9; \;\; p = \frac{10}{3}$$

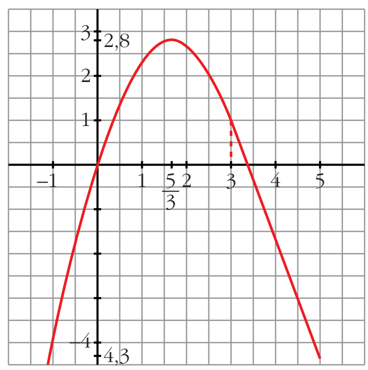
• Con estos valores:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{10}{3} & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\dfrac{8}{3} & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$-2x + \frac{10}{3} = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = \frac{5}{3} \in (-1, 5)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{5}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \dfrac{10}{3}x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -\dfrac{8}{3}x + 9 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



Página 290

1. Demuestra que: “Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$”.

Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de $[a, b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, su tesis:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

Se deduce que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ y, por tanto, $f(x_2) < f(x_1)$.

La función es, pues, decreciente en $[a, b]$.

2. Demuestra que: "Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo en x_0".

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) > 0 \;\to\; f$ es creciente a la izquierda de x_0 (1)

Si $h > 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) < 0 \;\to\; f$ es decreciente a la derecha de x_0 (2)

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0, ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

Página 297

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \ln(tg\ 2x)$ en $x = \frac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{sen\ 5x}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

a) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{8} \;\to\; y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{2(1 + tg^2\ 2x)}{tg\ 2x} \;\to\; y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 4x - \frac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{6} \;\to\; y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{5 \cos 5x}{2\sqrt{sen\ 5x}} \;\rightarrow\; y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{2/2}} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$$

• Recta tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \;\rightarrow\; y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 5 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 5) \\ y = 3 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendiente de las rectas:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y - 8) = 2 - 2x \;\rightarrow\; y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$$

• Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y = -x + 7$

• Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y = x + 1$

2 S **Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x - 1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

3 **Escribe las ecuaciones de las tangentes en los puntos que se indican:**

a) $y = Sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **en 0 y** $ln\ 2$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$ **en** $x = 0$

c) $y = (x^2 + 1)^{sen\ x}$ **en** $x = 0$ **y** $x = \pi$

a) $y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- **En** $x = 0$ $\rightarrow$ $f(0) = 0;$ $f'(0) = 1$

  $y = x$

- **En** $x = ln\ 2$ $\rightarrow$ $f(ln\ 2) = \dfrac{3}{4};$ $f'(ln\ 2) = \dfrac{5}{4}$

  $y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}(x - ln\ 2)$

b) $y' = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}} = \dfrac{2\sqrt{x+1} + 1}{4\sqrt{x+1}\ \sqrt{x + \sqrt{x+1}}};$ $f'(0) = \dfrac{3}{4};$ $f(0) = 1$

$y = 1 + \dfrac{3}{4}x$

c) Hallamos la derivada tomando logaritmos:

$$ln\ y = ln(x^2 + 1)^{sen\ x} \quad \rightarrow \quad ln\ y = sen\ x \cdot ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + sen\ x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y' = (x^2 + 1)^{sen\ x}\left[cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + \frac{2x\ sen\ x}{x^2 + 1}\right]$$

- **En** $x = 0$**:** $\rightarrow$ $f(0) = 1;$ $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ $y = 1$

- **En** $x = \pi$**:** $\rightarrow$ $f(\pi) = 1;$ $f'(\pi) = -ln(\pi^2 + 1)$

  $y = 1 - ln(\pi^2 + 1) \cdot (x - \pi)$

4
S **Halla un punto de la gráfica** $y = x^2 + x + 5$ **en el cual la recta tangente sea paralela a** $y = 3x + 8$**.**

- La pendiente de la recta $y = 3x + 8$ es $m = 3$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga 3:

  $f'(x) = 2x + 1$

  $f'(x) = 3 \quad \rightarrow \quad 2x + 1 = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 7$

- El punto es $(1, 7)$.

5 **S** **Halla una recta que sea tangente a la curva:**

$$y = x^2 - 2x + 3$$

y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal?

- Si forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas, su pendiente es $tg\ 45° = 1$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga 1:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 1 \ \rightarrow\ 2x - 2 = 1 \ \rightarrow\ x = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ y = \frac{9}{4}$$

- La recta es: $y = \frac{9}{4} + \left(x - \frac{3}{2}\right) \ \rightarrow\ y = x + \frac{3}{4}$

- Veamos si hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal; es decir, en el que la derivada valga cero:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = 1 \ \rightarrow\ y = 2 \ \rightarrow\ \text{Punto } (1, 2)$$

6 **Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:**

a) $y = x\ ln\ x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\ 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$

$$y' = 0 \ \rightarrow\ ln\ x + 1 = 0 \ \rightarrow\ ln\ x = -1 \ \rightarrow\ x = e^{-1} = \frac{1}{e} \ \rightarrow\ y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangente en el punto $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$ es: $y = \frac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\ e^x + x^2\ e^x = (2x + x^2)e^x$. Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \ \rightarrow\ 2x + x^2 = 0 \ \rightarrow\ x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow\ \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \ \rightarrow\ \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$

- En el punto $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \frac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\ cos\ 2x$

$$y' = 0 \ \rightarrow\ 2\ cos\ 2x = 0 \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \ \rightarrow\ y = 1 \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \ \rightarrow\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \ \rightarrow\ y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$

- En los puntos $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k,\ -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

7 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

Para hallar la derivada tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \ \rightarrow\ y \ln x + x \ln y = \ln 1 \ \rightarrow\ y \ln x + x \ln y = 0$$

Derivamos:

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y' xy \ln x + y^2 + xy \ln y + x^2 y' = 0$$

$$y'(xy \ln x + x^2) = -y^2 - xy \ln y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy \ln y}{xy \ln x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es:

$y = 1 - (x - 1)$; es decir, $y = -x + 2$

8 **Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forme un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.**

- Si forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\ 60° = \sqrt{3}$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \ \rightarrow\ 1 = 3x \ \rightarrow\ x = \frac{1}{3} \ \rightarrow\ y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \ \rightarrow\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow\ y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

9
S **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

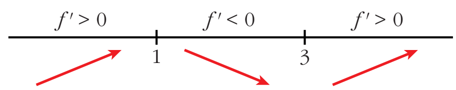
d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **f)** $y = e^x\,(x - 1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en $(3, 0)$ y un máximo en $(1, 4)$.

Puntos de inflexión:

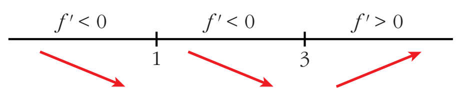
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

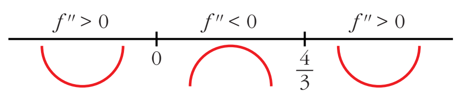
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

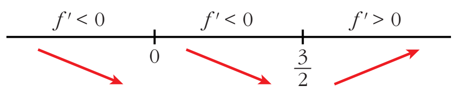
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

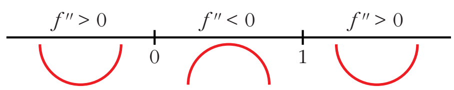
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x - 6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\rightarrow\; y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

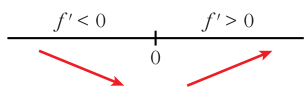
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$$



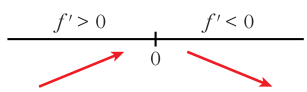
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

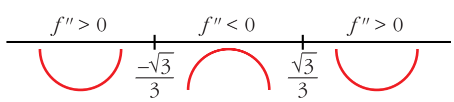
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm \qquad = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$

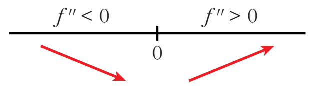


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

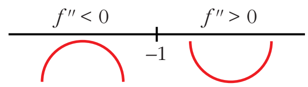
$y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

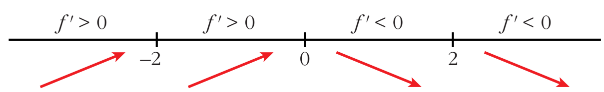
10 S **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximos o mínimos:**

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ **b)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $y = \frac{x^2-1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

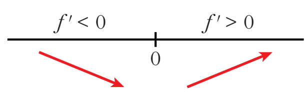
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

11 **S** **Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

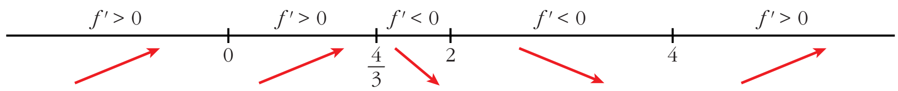
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3x^2 - 16x + 16 = 0 \quad \to \quad x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

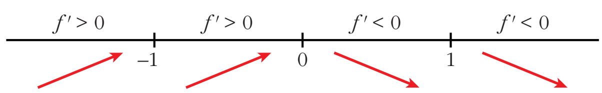
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -4x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

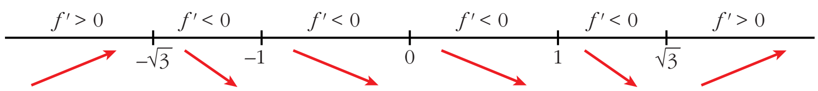
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

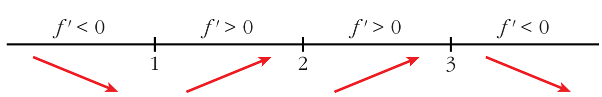
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

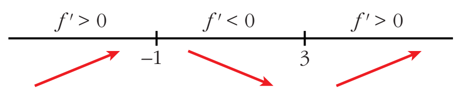
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

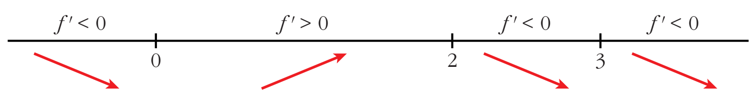
tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3x - 6 = 0 \quad \to \quad x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

12 **S** **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

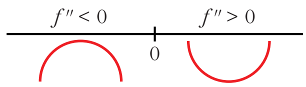
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

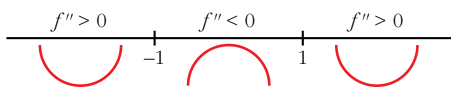
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \;\to\; 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \;\to\; x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

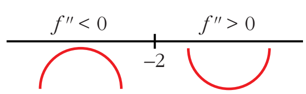
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \;\to\; x = -2$ ($e^x \neq 0$ para todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

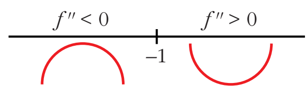
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

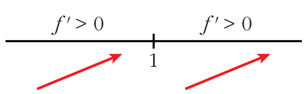
PARA RESOLVER

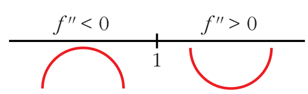
13 Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b) $y = 2 + (x - 1)^4$**

c) $y = 3 - (x - 1)^6$ **d) $y = -3 + 2(x - 1)^5$**

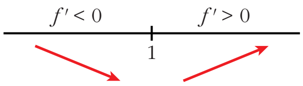
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$

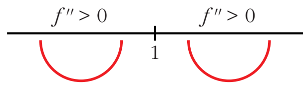




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

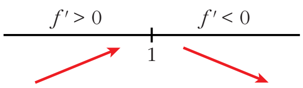
b) $f'(x) = 4(x-1)^3$; $\qquad f''(x) = 12(x-1)^2$

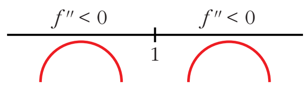




Hay un mínimo en $x = 1$.

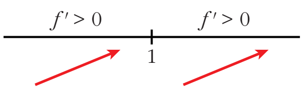
c) $f'(x) = -6(x-1)^5$; $\qquad f''(x) = -30(x-1)^4$

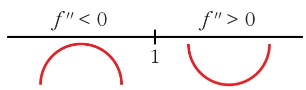




Hay un máximo en $x = 1$.

d) $f'(x) = 10(x-1)^4$; $\qquad f''(x) = 40(x-1)^3$





Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

Página 298

14 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.**

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f'(3) = \frac{-1}{9}$$

- Ecuación de la recta tangente en $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$$

- Puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados:

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; \text{Punto } (6, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} dist\left[\left(3, \dfrac{1}{3}\right), \left(0, \dfrac{2}{3}\right)\right] = (3-0)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{82}}{3} \\[2ex] dist\left[\left(3, \dfrac{1}{3}\right), (6, 0)\right] = (6-3)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{82}}{3} \end{array}\right\} \text{La distancia es la misma.}$$

15 **Dada la parábola $y = 3x^2$, encuentra un punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48).**

- La cuerda que une los puntos $(0, 0)$ y $(4, 48)$ tiene pendiente:

$$m = \frac{48}{4} = 12$$

- Buscamos un punto de la función $y = 3x^2$ en el que la derivada valga 12:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 12 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

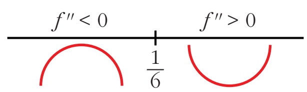
- El punto es $(2, 12)$.

16 **S** **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

17 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

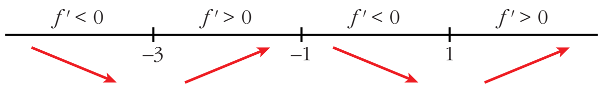
  $$2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $$-2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \text{y} \quad f'(x) = -2x - 2 \quad \text{para} \quad -3 < x < 1$$

  Por tanto $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

18 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

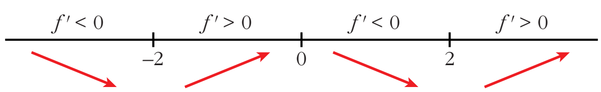
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

19 **S** **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo.**

¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + c = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente si $x \neq 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

20 **Estudia el crecimiento de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = e^x (cos\ x + sen\ x)}$$

y determina los máximos y mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

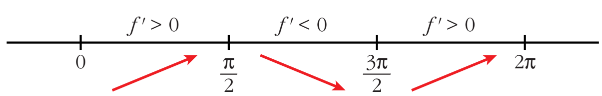
Consideramos la función: $f(x) = e^x(cos\ x + sen\ x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(cos\ x + sen\ x) + e^x(-sen\ x + cos\ x) = e^x(2\ cos\ x) = 2e^x\ cos\ x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\ x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \left(\text{para } x \in [0, 2\pi]\right)$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$

21 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{lll} f''(1) = 0 & \to & 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 & \to & 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \ \to \ a = -1$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $3b - 3 = 0 \ \to \ b = 1$

22
S **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.**

a) Halla a, b, c y d.

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

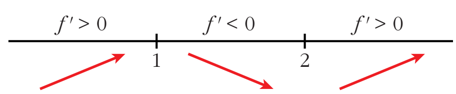
a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \to & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \to & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \to & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \to & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}$; $\quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

b) Signo de la derivada:



Hay un máximo para $x = 1$ y un mínimo para $x = 2$.

23
S **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en (2, 1). Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

24 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

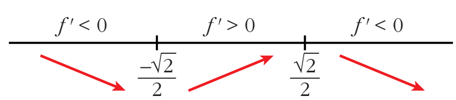
a) $f(x) = ax^3 + bx$; $\quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \to & a + b = 1 \\ f'(1) = -3 & \to & 3a + b = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} \quad f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -3(2x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

25 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **S** **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si en $x = 1$ tiene un punto de inflexión con tangente horizontal, ha de ser $f'(1) = f''(1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

27 **S** **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje OX en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 & \rightarrow & 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 & \rightarrow & 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

- Los puntos son (4, 0) y (2, 4).

28 **Halla los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 4x - 4$**

en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes.

☛ ***La ecuación de la tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, donde $f(a) = \dfrac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \dfrac{1}{2}a + 4$.***

Sustituye en la ecuación de la tangente y haz que esta pase por (0, –8).

La ecuación de la tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Como $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$, queda:

$$y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

Si la recta tangente pasa por $(0, -8)$:

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(-a)$$

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + \cancel{4a} - 4 - \frac{1}{2}a^2 - \cancel{4a}$$

$$-4 = -\frac{1}{4}a^2 \;\rightarrow\; -16 = -a^2 \;\rightarrow\; a^2 = 16 \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-4, -16)$ y $(4, 16)$
- Recta tangente en $(-4, -16)$: $f'(-4) = 2$

  $y = -16 + 2(x + 4) \;\rightarrow\; y = 2x - 8$
- Recta tangente en $(4, 16)$: $f'(4) = 6$

  $y = 16 + 6(x + 4) \;\rightarrow\; y = 6x - 8$

29
S **Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.**

$$y = 3x^2 - 5x + 12; \quad f'(x) = 6x - 5$$

- La recta tangente en un punto $(a, f(a))$ es:

  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; es decir:

  $y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$
- Para que pase por el origen de coordenadas, ha de ser:

  $0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a)$

  $0 = 3a^2 - \cancel{5a} + 12 - 6a^2 + \cancel{5a}$

  $3a^2 = 12 \;\rightarrow\; a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$
- Hay dos puntos: $(-2, 34)$ y $(2, 14)$
- Recta tangente en $(-2, 34)$: $f'(-2) = -17$

  $y = 34 - 17(x + 2) \;\rightarrow\; y = -17x$
- Recta tangente en $(2, 14)$: $f'(2) = 7$

  $y = 14 + 7(x - 2) \;\rightarrow\; y = 7x$

30 **S** **Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$:**

a) Halla la ecuación de la recta tangente a f en un punto cualquiera $x = a$.

b) Halla el valor o valores de a para que dicha recta pase por el punto $P(0, 0)$ (exterior a la curva).

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f'(x) = 2x - 3$

La recta tangente en $x = a$ es:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$; es decir:

$y = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (x - a)$

b) Para que la recta pase por $(0, 0)$ será:

$0 = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (-a)$

$0 = a^2 - \cancel{3a} + 4 - 2a^2 + \cancel{3a}$

$$a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Página 299

31 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

☛ ***Recuerda que el ángulo de dos rectas se puede calcular así:*** $tg\ \alpha = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$, ***donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas.***

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

  $f'(x) = 2 - 2x \;\rightarrow\; f'(2) = -2$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

  $g'(x) = 2x - 1 \;\rightarrow\; g'(2) = 3$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

  $$tg\ \alpha = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

32 **Halla el dominio de definición, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:**

a) $y = x^2 \ ln\ x$ **b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$**

a) $y = x^2 \ ln\ x$. *Dominio* $= (0, +\infty)$

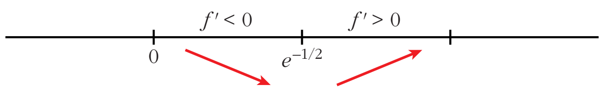
$$f'(x) = 2x\ ln\ x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ ln\ x + x = x(2\ ln\ x + 1)$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(2\ ln\ x + 1) = 0$

$x = 0$ (no vale, pues no está en el dominio)

$2\ ln\ x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad ln\ x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(0,\ e^{-1/2})$

es creciente en $(e^{-1/2},\ +\infty)$

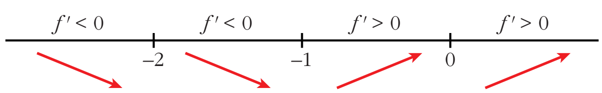
tiene un mínimo en $\left(e^{-1/2},\ \dfrac{-1}{2e}\right)$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}$ (La función no es derivable en $x = 0$ ni en $x = -2$).

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(-\infty,\ -1)$

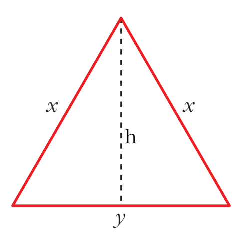
es creciente en $(-1,\ +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1,\ -1)$

33 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**

Perímetro $= 2x + y = 30 \quad \rightarrow \quad y = 30 - 2x$

Altura = h =



$$Área = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225}}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

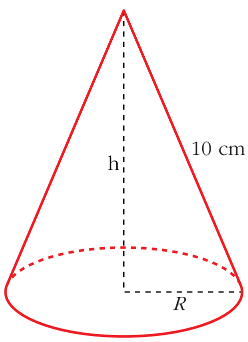
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($x = 15$ no vale, pues quedaría $y = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

34 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$$h^2 + R^2 = 100 \quad \rightarrow \quad R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \quad \rightarrow \quad 100 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h =$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

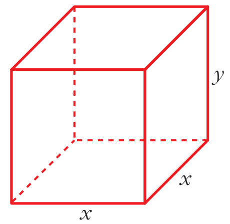
($f'(h) > 0$ a la izquierda de $h =$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h =$.

Luego, en $h =$ hay un máximo).

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \rightarrow \quad R =$$

35 S **Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.**



$$Volumen = x^2y = 8 \text{ dm}^3 \;\rightarrow\; y = \frac{8}{x^2}$$

$$Superficie = 4xy + 2x^2 = 4x\frac{8}{x^2} + 2x^2 = \frac{32}{x} + 2x^2$$

Tenemos que hallar el mínimo de la función superficie:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -32 + 4x^3 = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 8 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

(En $x = 2$ hay un mínimo, pues $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$).

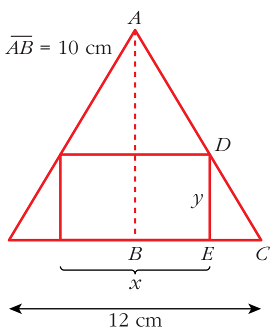
Por tanto, la caja ha de ser un cubo de lado 2 dm.

36 S **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como $\overline{AB} = 10$ cm $\qquad \overline{DE} = y$

$\overline{BC} = 6$ cm $\qquad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12 - x}{2}} \;\rightarrow\; \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \;\rightarrow\; y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60 - 5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \;\rightarrow\; A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

$Dominio = (0, 12)$

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

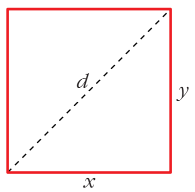
$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 60 - 10x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad \rightarrow \quad y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

37 **S** **De todos los rectángulos de área 100 dm^2, halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.**



Área $= x \cdot y = 100 \text{ dm}^2 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{100}{x}$

La diagonal mide:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \qquad\qquad =$$

Tenemos que minimizar la función:

$$d(x) =$$

$$d'(x) = \frac{2x - \dfrac{20\,000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{10\,000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20\,000}{2x^3\,\dfrac{\sqrt{x^4 + 10\,000}}{x}} = \frac{x^4 - 10\,000}{x^2\sqrt{x^4 + 10\,000}}$$

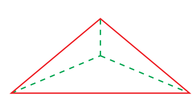
$$d'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 - 10\,000 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[4]{10\,000} = 10 \quad \rightarrow \quad x = 10 \quad \rightarrow \quad y = 10$$

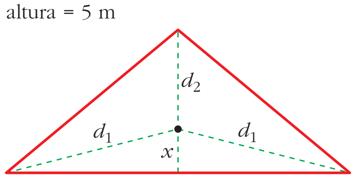
(En $x = 10$ hay un mínimo, pues $d'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $d'(x) > 0$ a la derecha de $x = 10$).

Por tanto, la diagonal mínima corresponde al cuadrado de lado 10 dm.

38 **Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.**

Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.





La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+36}}{}$$

$$S'(x) = 0 \;\to\; 2x - \sqrt{x^2+36} = 0 \;\to\; 2x = \sqrt{x^2+36}$$

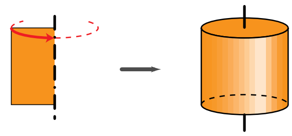
$$4x^2 = x^2 + 36 \;\to\; 3x^2 = 36 \;\to\; x^2 = 12 \;\to\; x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

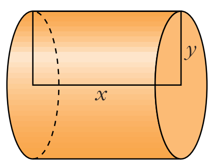
(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de este valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base, situado sobre la altura.

39 **Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.**





Perímetro cartulina $= 2x + 2y = 60 \;\to\; x + y = 30 \;\to$

$\to\; x = 30 - y$

Volumen $= \pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

Tenemos que maximizar la función:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

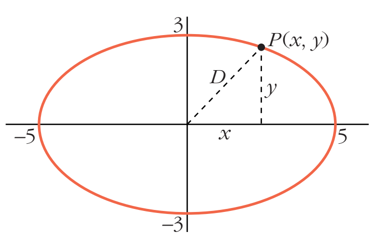
$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \;\to\; 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ y = 20 \;\to\; x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

40
S **El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$**

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.



La distancia de P a $(0, 0)$ es:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \;\to\; y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Así, la distancia es:

$$D(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \frac{\sqrt{16x^2 + 225}}{5}$$

El dominio de la función es el intervalo $[-5, 5]$.

Hallamos el máximo y el mínimo de $D(x)$:

$$D'(x) = \frac{32x}{10\sqrt{16x^2 + 225}}$$

$$D'(x) = 0 \;\;\to\;\; x = 0$$

(En $x = 0$ hay un mínimo relativo, pues $D'(x) < 0$ para $x < 0$ y $D'(x) > 0$ para $x > 0$).

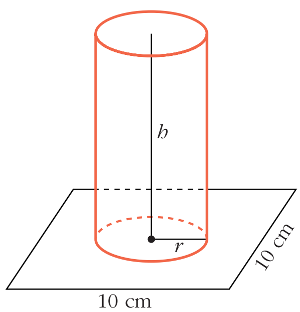
Veamos el valor de $D(x)$ en $x = 0$ y en los extremos del intervalo $[-5, 5]$:

$$D(0) = 3; \quad D(-5) = D(5) = 5$$

Por tanto, las posiciones de P que nos dan la distancia máxima son $P(5, 0)$ y $P(-5, 0)$; y las que nos dan la distancia mínima son $P(0, 3)$ y $P(0, -3)$.

41 **S** **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm².**

¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?



Área lateral cilindro $= 2\pi r\text{h} = 50 \text{ cm}^2 \;\;\to\;\; \text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2\text{h} = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \;\;\to\;\; V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con $r \in (0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

42 **S** **Dada la función $f: [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

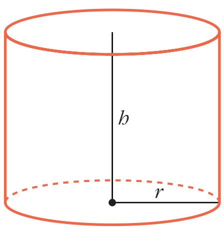
$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tangente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

43 S **Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.**



Área total $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 54$ cm²

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volumen $= \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$

Tenemos que maximizar la función $V(r) = 27r - \pi r^3$:

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

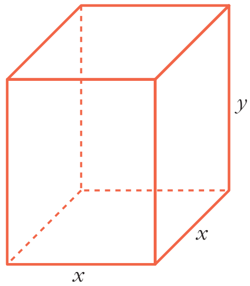
$$V'(r) = 0 \;\rightarrow\; 27 - 3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\rightarrow\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

(En $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ hay un mínimo, pues $V'(r) < 0$ a la izquierda de este valor y $V'(r) > 0$ a su derecha).

Para $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \;\rightarrow\; h = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensiones del cilindro de volumen máximo.

44 **Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro.**

Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



$$Volumen = x^2 y = 80 \text{ cm}^3 \quad \to \quad y = \frac{80}{x^2}$$

Para la tapa y el lateral $\to$ z €/cm^2

Para la base $\to$ $1{,}5z$ €/cm^2

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2 z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2 z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) =$$

$$= z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

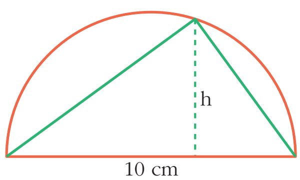
$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \quad \to \quad 5x^3 - 320 = 0 \quad \to \quad x^3 = 64 \quad \to \quad x = 4 \quad \to \quad y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

45 S **Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10 cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?**



La base mide 10 cm. El área es:

$$Área = \frac{10 \cdot h}{2} = 5h; \quad h \in (0, 5].$$

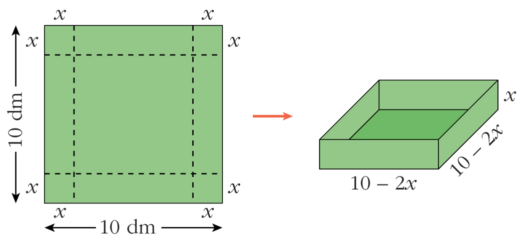
El de área máxima será el que tenga la máxima altura; es decir, $h = 5$ cm. Su área es 25 cm^2.

Página 300

46 **Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

Si la altura de la caja no puede pasar de 2 dm, ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?



El volumen de la caja es:

$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$

Tenemos que maximizar esta función:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 \quad \text{(no vale)} \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hay un máximo, pues la derivada es positiva a la izquierda de este valor y es negativa a su derecha).

Por tanto, el lado del cuadradito es $x = 5/3$.

Si la altura no puede pasar de 2 dm; es decir, si $x \in (0, 2)$, obtenemos el mismo resultado: $x = 5/3$.

47 **Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.**

Como $x^2 + y^2 = r$ y nos dicen que $y > 0$, entonces: $y = \sqrt{r - x^2}$

Así, la suma es: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Tenemos que maximizar la función $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{}$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r - x^2} = x \;\rightarrow\; r - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r = 2x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{r}{2}$$

Como $x > 0 \;\rightarrow\; x =$

(En $x =$ hay un máximo, pues $S'(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos y: $y = \sqrt{r - x^2} =$ $=$

Por tanto, la suma es máxima cuando $x = y =$.

48 **El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t - 2)^2$, $0 \le t \le 4{,}5$.**

Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

Derivamos la función $f(t)$:

$$f'(t) = -2(t - 2)$$

Los puntos críticos son:

$$f'(t) = 0 \;\rightarrow\; -2(t - 2) = 0 \;\rightarrow\; t - 2 = 0 \;\rightarrow\; t = 2$$

La función f tiene un punto crítico en $(2, 9)$.

$$f''(t) = -2$$

$$f''(t) = -2 < 0 \;\rightarrow\; (2, 9) \text{ es un máximo.}$$

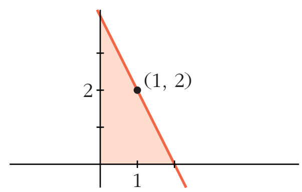
Además, como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo:

$$f(0) = 5$$

$$f(4{,}5) = 2{,}75 \;\rightarrow\; (4{,}5;\, 2{,}75) \text{ es un mínimo.}$$

Por tanto, el máximo se alcanza para $t = 2$ y el mínimo para $t = 4{,}5$.

49 **De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.**



Las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ son de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 2 - m \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 2 - m)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x = 1 - \dfrac{2}{m} \;\rightarrow\;$ Punto $\left(1 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \;\rightarrow\; -m^2 + 4 = 0 \;\begin{cases} m = 2 \;\; \text{(no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

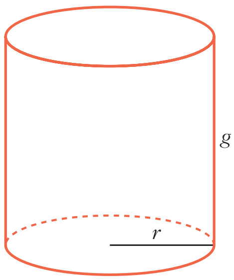
($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ es decir: } y = -2x + 4$$

50 **Calcula la generatriz y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada, cuya área total (incluyendo las dos tapas) es de 150 cm², para que su volumen sea máximo.**



$$\textit{Área total} = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$g = \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\textit{Volumen} = \pi r^2 g = \pi r^2 \cdot \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 75r - \pi r^3$$

Tenemos que maximizar el volumen:

$$V(r) = 75r - \pi r^3; \quad V'(r) = 75 - 3\pi r^2$$

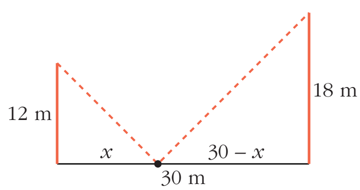
$$V'(r) = 0 \quad \rightarrow \quad 75 - 3\pi r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \qquad = \qquad = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

(Solo consideramos la raíz positiva, pues $r > 0$).

(En $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ hay un máximo, pues $V'(r) > 0$ a la izquierda de ese valor y $V'(r) < 0$ a su derecha).

Por tanto: $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ y $g = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$

51 **Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

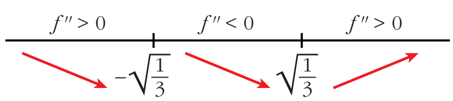
52 **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm$$



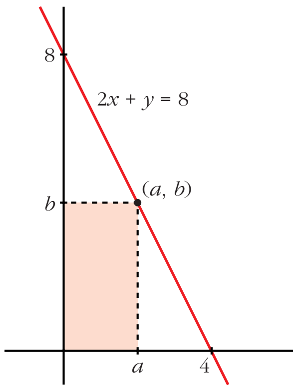
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

En $x = -$ hay un máximo (absoluto) de $f'(x)$ y en $x =$ hay un mínimo (absoluto) de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

53 **S** **Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0), (0, 0), (a, b)$ y $(0, b)$. Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.**



- El punto (a, b) es un punto de la recta $2x + y = 8$. Por tanto, $2a + b = 8$; es decir, $b = 8 - 2a$.
- Como el rectángulo está inscrito en el triángulo, $a \in (0, 4)$.
- El área del rectángulo es:

  $\textit{Área} = a \cdot b = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2, \ a \in (0, 4)$
- Tenemos que maximizar la función:

  $A(a) = 8a - 2a^2, \ a \in (0, 4)$

  $A'(a) = 8 - 4a = 0 \ \rightarrow \ a = 2 \ \rightarrow \ b = 4$

(En $a = 2$ hay un máximo, pues $A'(a) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(a) < 0$ a su derecha).

- Por tanto, el punto es $(2, 4)$.

54 **S** **Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}$ **c)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ **e)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x}$ **f)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\text{sen } x}}{1 - \cos x}$

g) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$ **h)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$ **i)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}\right)$

a) $$\text{lím} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \text{lím} \frac{3x^2}{2x - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

b) $$\text{lím} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \text{lím} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

c) $$\text{lím} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \text{lím} \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\text{lím} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\infty; \quad \text{lím} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = +\infty$$

d) $\lim \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

e) $\lim \dfrac{arctg\, x - x}{x - sen\, x} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim \dfrac{\dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}}{sen\, x} = \lim \dfrac{\dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f) $\lim \dfrac{e^x - e^{sen\, x}}{1 - \cos x} = \lim \dfrac{e^x - e^{sen\, x} \cdot \cos x}{sen\, x} =$

$= \lim \dfrac{e^x - e^{sen\, x} \cos^2 x + e^{sen\, x}\, sen\, x}{\cos x} = 0$

g) $\lim \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim \dfrac{\dfrac{-3\, sen\, 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim \dfrac{-3\, tg\, 3x}{2x} =$

$= \lim \dfrac{-9(1 + tg^2\, 3x)}{2} = -\dfrac{9}{2}$

h) $\lim \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim \dfrac{4\sqrt[4]{x}}{3(1 + x)} = 0$

i) $\lim \dfrac{1 - \cos^2 (2x)}{3x^2} = \lim \dfrac{2 \cos (2x)\, sen\, (2x) \cdot 2}{6x} = \lim \dfrac{2\, sen\, 4x}{6x} =$

$= \lim \dfrac{sen\, 4x}{3x} = \lim \dfrac{4 \cos 4x}{3} = \dfrac{4}{3}$

j) $\lim \left(\dfrac{x - sen\, x}{x\, sen\, x}\right) = \lim \dfrac{1 - \cos x}{sen\, x + x \cos x} = \lim \dfrac{sen\, x}{\cos x + \cos x - x\, sen\, x} = 0$

55 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln (tg\, x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (tg\, x)^{\cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - sen\, 2x)^{cotg\, 3x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x}$

a) $\lim \; \cos x \, ln\,(tg\,x) = (0 \cdot +\infty) = \lim \dfrac{ln\,(tg\,x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) =$

$$= \lim \frac{\dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}}{\dfrac{sen\,x}{\cos^2 x}} = \lim \frac{1 + tg^2\,x}{\dfrac{tg^2\,x}{\cos x}} = \lim \frac{\cos x(1 + tg^2\,x)}{tg^2\,x} =$$

$$= \lim \; \cos x\left(\frac{1}{tg^2\,x} + 1\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

b) $\lim \; (\cos x + sen\,x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \; ln\,(\cos x + sen\,x)^{1/x} = \lim \frac{ln\,(\cos x + sen\,x)}{x} = \lim \frac{-sen\,x + \cos x}{\cos x + sen\,x} = 1$$

Por tanto: $\lim \; (\cos x + sen\,x)^{1/x} = e$

c) $\lim \; (tg\,x)^{\cos x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \; ln\,(tg\,x)^{\cos x} = \lim \; \cos x \cdot ln\,(tg\,x) \overset{(*)}{=} 0$$

(*)(ver apartado a))

Por tanto: $\lim \; (tg\,x)^{\cos x} = e^0 = 1$

d) $\lim \; (e^x + x^3)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \; ln\,(e^x + x^3)^{1/x} = \lim \frac{ln\,(e^x + x^3)}{x} = \lim \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

Por tanto: $\lim \; (e^x + x^3)^{1/x} = e$

e) $\lim \; (1 + x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \; ln\,(1 + x)^{1/x} = \lim \frac{ln\,(1 + x)}{x} = \lim \frac{1}{1 + x} = 0$$

Por tanto: $\lim \; (1 + x)^{1/x} = e^0 = 1$

f) $\lim \; x\,ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right) = \lim \; x\,ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim \; ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x =$

$$= ln\left[\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = ln\,e = 1$$

g) $\lim (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = \lim (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\ ln\ (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x} = \lim \frac{ln\ (1 - sen\ 2x)}{tg\ 3x} = \lim \frac{\dfrac{-2\cos 2x}{1 - sen\ 2\ x}}{(1 + tg^2\ 3x)\cdot 3} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto: $\lim (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = e^{-2/3}$

h) $\lim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\ x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\ ln \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = \lim\ tg\ x\ ln \left(\frac{1}{x}\right) = \lim\ [tg\ x\ (-ln\ x)] = \lim \frac{sen\ x\ (-ln\ x)}{\cos x} =$$

$$= \lim \frac{-ln\ x}{\dfrac{\cos x}{sen\ x}} = \lim \frac{\dfrac{-1}{x}}{\dfrac{-1}{sen^2\ x}} = \lim \frac{sen^2\ x}{x} = \lim \frac{2\ sen\ x \cos x}{1} = 0$$

Por tanto: $\lim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\ x} = e^0 = 1$

56 S **Halla los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\ x - 8}{\sec x + 10}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$

a) $\lim \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim \dfrac{sen\ x}{e^x} = 0$

b) $\lim \dfrac{tg\ x - 8}{\sec x + 10} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{sen\ x}{\cos^2 x}} = \lim \dfrac{1}{sen\ x} = 1$

c) $\lim \dfrac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \lim \dfrac{sen\ x + 2x}{4x} = \lim \dfrac{\cos x + 2}{4} = \dfrac{3}{4}$

Página 301

57 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right)$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1}\right)$

a) $\text{lím} \left(\dfrac{1}{sen\ x} - \dfrac{1}{x} \right) = \text{lím} \dfrac{x - sen\ x}{x\ sen\ x} = \text{lím} \dfrac{1 - cos\ x}{sen\ x + x\ cos\ x} =$

$$= \text{lím} \frac{sen\ x}{cos\ x + cos\ x - x\ sen\ x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $\text{lím} \left(\dfrac{1}{cos\ 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)} \right) = \text{lím} \dfrac{1 - (4x/\pi) - tg\ x \cdot cos\ 2x}{(cos\ 2x)(1 - (4x/\pi))} =$

$$= \text{lím} \frac{-4/\pi - \dfrac{cos\ 2x}{cos^2\ x} + 2\ tg\ x \cdot sen\ 2x}{-2\ sen\ 2x(1 - (4x/\pi)) + cos\ 2x \cdot (-4/\pi)} = \frac{2 - 4/\pi}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$\text{lím}\ f(x) = -\infty, \quad \text{lím}\ f(x) = +\infty \quad \left(\text{siendo } f(x) = \dfrac{1}{cos\ 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)} \right).$

c) $\text{lím} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \text{lím} \dfrac{e \cdot x - e - e^x + e}{(e^x - e)(x - 1)} = \text{lím} \dfrac{e \cdot x - e^x}{(e^x - e)(x - 1)} =$

$$= \text{lím} \frac{e - e^x}{e^x(x - 1) + (e^x - e)} = \text{lím} \frac{-e^x}{e^x(x - 1) + e^x + e^x} = \frac{-e}{2e} = \frac{-1}{2}$$

58 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

a) $\text{lím}\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\text{lím}\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \text{lím}\ x\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot +\infty) =$$

$$= \text{lím} \frac{ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \text{lím} \frac{\dfrac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) + e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{e^{1/x} + e^{2/x}}}{-1/x^2} =$$

$$= \text{lím} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \text{lím} \frac{e^{-1/x} + 2}{e^{-1/x} + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{2/x}$).

Por tanto: $\text{lím}\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

b) $\text{lím}\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\text{lím}\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \text{lím}\ x\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot -\infty) =$$

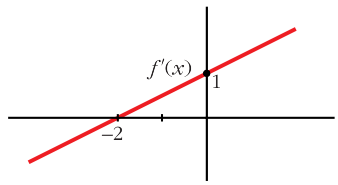
$$= \lim \frac{\ln(e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \lim \frac{1 + 2e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{1/x}$).

Por tanto: $\lim (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^1 = e$

CUESTIONES TEÓRICAS

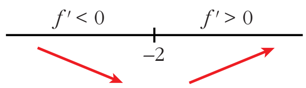
59 **La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f', de una función f.**



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene punto de inflexión?

a) Signo de la derivada:



$f'(-2) = 0$

Por tanto, la función f es decreciente en $(-\infty, -2)$

es creciente en $(-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$, entonces $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$.

Por tanto, f es una función cóncava. No tiene puntos de inflexión.

60 **Encuentra una función f cuya gráfica no sea una recta y en la que existan infinitos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 1$.**

$f(x) = \cos x$

Veamos que la recta tangente a $f(x)$ en los puntos de la forma $x = 2\pi k$, con $k \in Z$, es $y = 1$.

$f(2\pi k) = \cos(2\pi k) = 1$

$f'(x) = -\text{sen}\, x \rightarrow f'(2\pi k) = -\text{sen}\,(2\pi k) = 0$

La recta tangente es:

$y = 1$

61 **Sea $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, con a y b números positivos. Demuestra que el valor mínimo de f en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.**

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; ax^2 - b = 0 \;\rightarrow\; x = \pm$$

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

$$f''\Big(\qquad\Big) > 0 \;\rightarrow\; \text{en } x = \qquad \text{hay un mínimo.}$$

$$f''\Big(-\qquad\Big) < 0 \;\rightarrow\; \text{en } x = - \qquad \text{hay un máximo.}$$

Además, $\lim f(x) = +\infty$ y $\lim f(x) = +\infty$.

Luego, en $x =$ se encuentra el mínimo absoluto de $f(x)$.

Este mínimo vale:

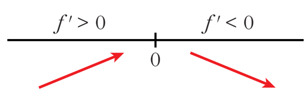
$$f\Big(\qquad\Big) = a \cdot \qquad + \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{a\sqrt{b}}{} + \frac{b\sqrt{a}}{} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

Es decir, el mínimo de $f(x)$ en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.

62 **Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\quad$ $f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

63 **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

¿Puede ser $f'(a) > 0$?

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$? Razónalo.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\to\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\to$$

$$\to \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\to\; \begin{cases} f'(0) = 0 \;\; (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 \;\; \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

64 **Si la derivada de una función f es positiva en el punto $x = 0$, es decir, $f'(0) > 0$, ¿para qué valores de h se puede afirmar que el incremento $f(\text{h}) - f(0)$ es negativo?**

$$f'(0) = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{f(\text{h}) - f(0)}{\text{h}} > 0 \;\to$$

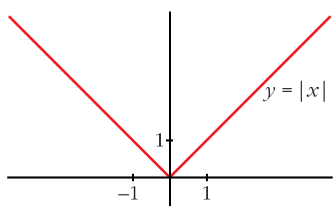
$\to$ signo de $[f(\text{h}) - f(0)]$ = signo de h (para h “próximo a cero”)

Luego, si $f(\text{h}) - f(0) < 0$, ha de ser $\text{h} < 0$.

65 **La función $|x|$ (valor absoluto de x), ¿presenta un mínimo relativo en algún punto? ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

66 **En la ecuación de la recta $y = mx + b$, explica cómo se determinarían los números m y b para que sea tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto en que esta tiene de abscisa p.**

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = p$ es:

$y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$; es decir:

$y = f'(p)\, x + [f(p) - p \cdot f'(p)]$

Por tanto, si la recta es $y = mx + b$, tenemos que:

$$m = f'(p); \quad b = f(p) - p \cdot f'(p)$$

67 S **Un polinomio de 3er grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$. Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.**

Un polinomio de tercer grado *no* tiene máximo absoluto.

Veamos por qué:

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad f(x) \text{ } \textit{no} \text{ tiene máximo absoluto.}$$

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$, entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad f(x) \text{ } \textit{no} \text{ tiene máximo absoluto.}$$

68 **Si la derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable, ¿puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

69 **Si $f''(x) > 0$ para todo x del dominio de f, ¿qué podemos decir de la gráfica de f?**

Será una función cóncava.

70 S **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \quad \to \quad f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

71 S **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?**

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

Página 302

72 **Si $y = f(x)$ es una función creciente en $x = a$, ¿se puede asegurar que $g(x) = -f(x)$ es decreciente en $x = a$?**

$f(x)$ es creciente en $x = a$ $\rightarrow$ $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

Como $g(x) = -f(x)$, tenemos que:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{-f(x) + f(a)}{x - a} = -\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) < 0$$

$\rightarrow$ $g(x)$ es decreciente en $x = a$

73 S **Se tiene la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\[2mm] \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface la hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

- Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

— **Si $x \neq -1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

— **Si $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{x}\right) = -1 \\[4mm] \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\[4mm] f(1) = -1 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

— Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$.

• Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

— **Si $x \neq -1$ y $x \in (-2, 0)$,** f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

— **En $x = -1$,** tenemos que:

$$f'(-1^-) = -1 = f'(-1^+)$$

Por tanto $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

— Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

• Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe algún punto, $c \in (-2, 0)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

— $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \leq -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{cases}$$

— $f'(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

— Por tanto, hay dos soluciones:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \;\text{ y }\; c_2 = -\sqrt{2}$$

74 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

• Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

• Continuidad:

— **Si $x \neq 1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En $x = 1$,** tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x + 1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ a + b + 3 = 6, \text{ es decir, } a + b = 3.\end{array}$$

• Derivabilidad:

— **Si** $\boldsymbol{x \neq 1}$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

— **En** $\boldsymbol{x = 1}$**,** tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 2a + b = 5$$

• Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 3 - a \\ 2a + 3 - a = 5 \quad \rightarrow \quad a = 2 \quad \rightarrow \quad b = 1 \end{array}$$

• Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f(x)$ es creciente $\rightarrow$ No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ $\rightarrow$ No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

75 S **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]?**

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$; luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 4]$.

Veamos en qué punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 3 = -1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 4 = 0$$

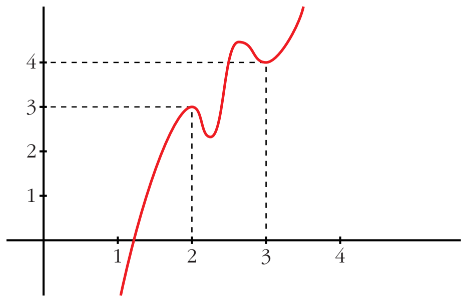
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

76 **S** **a) Si es posible, dibuja la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

a) Por ejemplo:

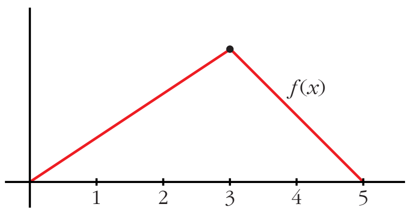


b) Si $f(x)$ es derivable, para que sea posible lo anterior, debe haber, al menos, otro máximo y otro mínimo.

Por tanto, la derivada se anularía, al menos, en cuatro puntos. Luego la función, si fuera polinómica, tendría, al menos, grado 5.

77 **S** **¿Puede existir una función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ continua en todos los puntos de I, que tenga un máximo local en el punto $x = 3$, pero que no sea derivable en $x = 3$?**

Sí. Por ejemplo:



- $f(x)$ es continua en $[0, 5]$.
- $f(x)$ no es derivable en $x = 3$, pues $f'(3^-) \neq f'(3^+)$.
- $f(x)$ tiene un máximo en $x = 3$.

78 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego, verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{6} \begin{cases} x = -\sqrt{6} & \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} & \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

79 **La función $f(x) = |\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?**

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{es continua en } [0, \pi]$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Como $f'\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right) = -1 \neq f'\left(\dfrac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ *no* es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

80 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

- Continuidad:

— **Si $x \neq 4$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En $x = 4$**, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ &\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ &f(4) = 24 - b \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $4a - 3 = 24 - b$; es decir: $4a + b = 27$

- Derivabilidad:

— **Si $x \neq 4$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

— **En $x = 4$:**

$$\left.\begin{aligned} f'(4^-) &= a \\ f'(4^+) &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

• Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

• Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

En este caso, quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \ge 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

• Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

81 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$.**

Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \rightarrow \quad \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

82 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \dfrac{f(5) - 3}{5 - 0} = \dfrac{f(5) - 3}{5} = 8 \quad \rightarrow \quad f(5) = 43$

83 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

• Continuidad:

— **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En $x = 2$**, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de} \\ \text{ser } 4 + 2a + b = 2c + 1; \\ \text{es decir: } 2a + b - 2c = -3 \end{array}$$

• Derivabilidad:

— **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

— **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

• $$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c + 1 \end{array}\right\} b = 4c + 1$$

• Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$, ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}$$

En este caso, sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

• Veamos dónde se cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

84 **Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema, que la función $f(x) = sen(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo [–1, 1]? Justifica la respuesta.**

• **Teorema de Rolle:** Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

• Si $f(x) = sen\,(x^2) + x^2$, tenemos que:

— Es continua en $\mathbb{R}$; y, por tanto, en $[-1, 1]$.

— Es derivable en $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\cos(x^2) + 2x$; y, por tanto, en $(-1, 1)$.

— Además, $f(-1) = f(1) = (\text{sen } 1) + 1$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

Por tanto, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

85 **En cada uno de los ejemplos que se dan a continuación, es $f(a) = f(b)$ y, sin embargo, no hay ningún número $z \in (a, b)$ para el que sea $f'(z) = 0$.**

Explica, en cada caso, por qué el ejemplo no va en contra del teorema de Rolle.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $[a, b] = [-2, 2]$ **b)** $f(x) = 1 - |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$

a) $f(x)$ no es continua ni derivable en $x = 0 \in (-2, 2)$, pues no está definida en ese valor.

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0 \in (-1, 1)$; puesto que $f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1$.

Página 303

86 **Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

$f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, b]$ y derivable en $(0, b)$, cualquiera que sea el valor de b.

Para que cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, b]$, ha de tenerse que $f(0) = f(b)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{array}\right\} \quad b^3 - 4b + 3 = 3 \;\rightarrow\; b^3 - 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} b = 0 \quad (\text{no vale}) \\ b = -2 \quad (\text{no vale}) \\ b = 2 \end{cases}$$

(Como consideramos el intervalo $[0, b]$, ha de ser $b > 0$).

Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en $[0, 2]$.

Veamos dónde cumple la tesis:

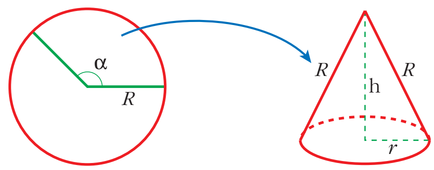
$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm$$

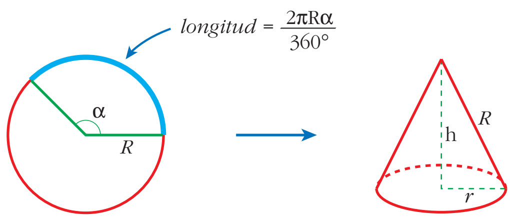
La tesis se cumple en $c =$ $\in (0, 2)$; es decir, $c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

PARA PROFUNDIZAR

87 **Si de un disco metálico quitamos un sector circular, podemos construir un vaso cónico.**

Determina el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.





- Longitud de la circunferencia de la base del cono:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi R\alpha}{360} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R\alpha}{360}$$

- Altura del cono: $h = \sqrt{R^2 - r^2} =$ $= \frac{R}{360}\sqrt{129\,600 - \alpha^2}$

- Volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{360^2} \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{129\,600 - \alpha^2} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

- Hallamos α para que el volumen sea máximo:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \cdot \frac{518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}}$$

$$V'(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad 518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5 = 0$$

$$6\alpha^3(86\,400) - \alpha^2) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 293°\ 56'\ 20'' \\ \alpha = -293°\ 56'\ 20'' \end{cases}$$

El máximo se alcanza en $\alpha = 293° \ 56' \ 20''$ (la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha, y estamos considerando x entre 0° y 360°).

Así, el cono tendrá radio $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ y altura $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Su volumen sería $\dfrac{2\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$.

88 **Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm y, uniendo sus extremos, se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.**

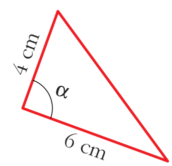
¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos? ¿Y el minutero? ¿Cuál es el ángulo que forman entre las dos en t minutos?

- La aguja horaria recorre un ángulo de 360° en 12 horas; es decir, 0,5° en 1 minuto; o bien $0{,}5t°$ en t minutos.

- El minutero recorre 360° en 1 hora; es decir, 6° en 1 minuto; o bien $6t°$ en t minutos.

- Al cabo de t minutos, las dos agujas formarán un ángulo de $\alpha = 6t° - 0{,}5t° = 5{,}5t°$.

- El área del triángulo será:



$$Área = \frac{4 \cdot 6 \cdot sen\,(5{,}5t)}{2} = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

$$A(t) = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

- Hallamos el máximo de $A(t)$, teniendo en cuenta que $t \in (0, 30)$ (pues estamos considerando entre las 12 h y las 12 h 30 min):

$$A'(t) = 12 \cdot 5{,}5 \cdot cos\,(5{,}5t) = 0 \ \stackrel{(*)}{\to} \ 5{,}5t = 90 \ \to \ t = \frac{90}{5{,}5} =$$

$$= 16{,}\overset{\frown}{36} = 16 \text{ minutos y 22 segundos}$$

(*) (Si igualamos $5{,}5t$ a un ángulo mayor de 90°, obtenemos $t > 30$ min).

(En $t = 16{,}\overset{\frown}{36}$ minutos hay un máximo, pues la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha).

Por tanto, el triángulo de área máxima se forma a las 12 h 16 min 22 segundos.

89 **Comprueba que, en la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{k}{x}$, se tiene que el punto c, que cumple $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es, precisamente, la media geométrica de a y b, $c = \sqrt{ab}$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{-k}{c^2} \\[2ex] \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{a}}{b - a} = \dfrac{\dfrac{ka - kb}{ab}}{b - a} = \dfrac{-k(b - a)}{ab(b - a)} = \dfrac{-k}{ab} \end{array}\right\}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;\rightarrow\; \frac{-k}{c^2} = \frac{-k}{ab} \;\rightarrow\; c^2 = ab \;\rightarrow\; c = \sqrt{ab}$$

(Suponemos $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

90 **Calcula el valor de k para que la expresión $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}$ sea igual a e^4.**

$lím\ (e^x + kx)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$lím\ \ln(e^x + kx)^{1/x} = lím\ \frac{\ln(e^x + kx)}{x} \overset{(*)}{=} lím\ \frac{e^x + k}{e^x + kx} = \frac{1 + k}{1} = 1 + k$$

(*) Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

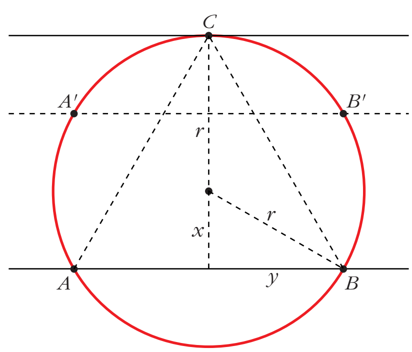
Por tanto: $lím\ (e^x + kx)^{1/x} = e^{1+x}$

Para que sea igual a e^4, ha de ser:

$$e^{1+x} = e^4 \;\rightarrow\; 1 + k = 4 \;\rightarrow\; k = 3$$

91 **En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos, así, un triángulo ABC cuya área queremos que sea la mayor posible.**

Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser $\frac{3}{2}$ del radio.



- La altura del triángulo ha de ser mayor que el radio, pues, si trazamos la cuerda por $A'B'$, podemos conseguir otro triángulo con la misma base, AB, y mayor altura; y, así, con mayor área.

- Expresamos el área del triángulo en función de x:

$altura = x + r$

$$\left.\begin{array}{l} base = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} \;\rightarrow\; base = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Área = \frac{2(x + r)\sqrt{r^2 - x^2}}{2} = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad x \in [0,\ r)$$

- Obtenemos el valor de x para el que $A(x)$ alcanza el máximo:

$$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{cases} x = -r \text{ (no vale)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{cases}$$

(En $x = \frac{r}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r}{2}$. Por tanto, la distancia de C a la cuerda, que es la altura del triángulo, es:

$$\text{h} = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- **Observación:**

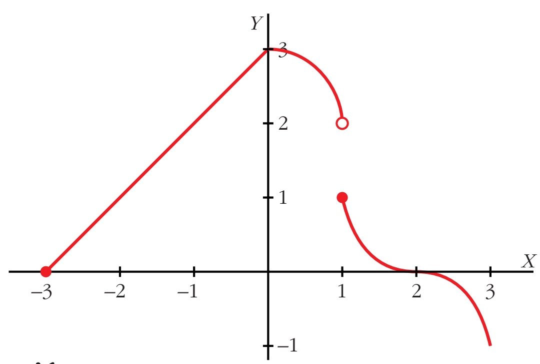
Vamos a calcular la longitud de los lados del triángulo:

$$AB = base = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

$$AC = BC = \sqrt{y^2 - \text{h}^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

Por tanto, hemos obtenido que el triángulo inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el triángulo equilátero.

92 S **De la función $f(x)$ definida en [–3, 3] se conoce su gráfica, dada por:**



a) Estudia la continuidad de la función.

b) Estudia la derivabilidad de la función.

c) Dibuja razonadamente la gráfica de $f'(x)$.

a) La función es continua en todo su dominio, excepto en $x = 1$; puesto que:

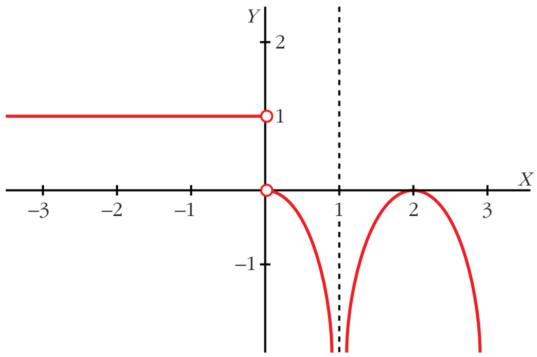
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{En } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

b) La función es derivable, excepto en $x = 0$ y en $x = 1$.

En $x = 0$ hay "un pico"; es decir, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

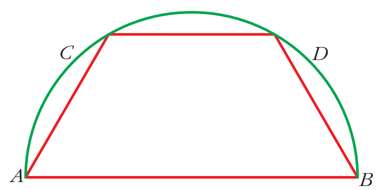
En $x = 1$ *no* es continua la función; por tanto, no puede ser derivable.

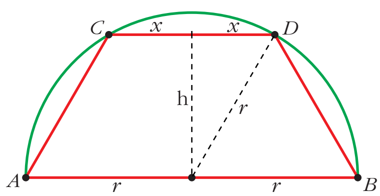
c)



PARA PENSAR UN POCO MÁS

93 **En una semicircunferencia de diámetro $AB = 2r$ se traza una cuerda CD paralela a AB. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio $ABDC$ sea máxima?**





• Llamamos x a la mitad de la base CD; es decir, a la mitad de la longitud de la cuerda.

• La altura del trapecio será:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

• El área del trapecio es:

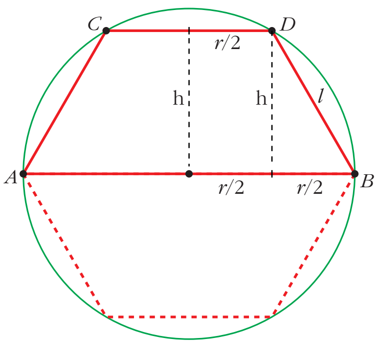
$$\text{Área} = \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} = (r + x) \cdot h = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (0, r)$$

Esta función es la misma que obtuvimos en el ejercicio **91**; por tanto, alcanza el máximo en $x = \dfrac{r}{2}$ (ver dicho ejercicio).

• Así, la longitud de la cuerda es $2x = r$; es decir, $CD = r$.

Observación:



Si completamos la figura de forma simétrica, obtenemos un hexágono de área máxima inscrito en una circunferencia. Veamos que se trata de un hexágono regular:

$$CD = r$$

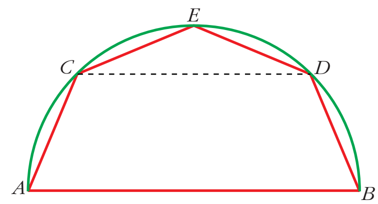
$$\text{h} = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

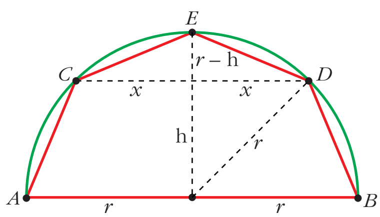
$$l = \sqrt{\text{h}^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2} = r$$

Luego el lado del hexágono es r, igual al radio de la circunferencia.

Por tanto, el hexágono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el hexágono regular.

94 **En la figura del problema anterior, llamamos E al punto medio del arco CD y dibujamos el pentágono $ACEDB$. Calcula la longitud de la cuerda CD para que el área del pentágono sea máxima.**





• Llamamos x a la mitad de la longitud de la cuerda CD.

• El área del pentágono es igual a la suma de las áreas del trapecio $CDBA$ y del triángulo CDE:

$$\text{h} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Área = \frac{(2r + 2x) \cdot \text{h}}{2} + \frac{2x \cdot (r - \text{h})}{2} = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x(r - \sqrt{r^2 - x^2}) =$$

$$= \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} + r\sqrt{r^2 - x^2} + xr - \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} = xr + r\sqrt{r^2 - x^2} = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$A(x) = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right], \quad x \in (0, r)$$

• Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = r\left[1 + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = r\left[\frac{\sqrt{r^2 - x^2} - x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} - x = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} = x$$

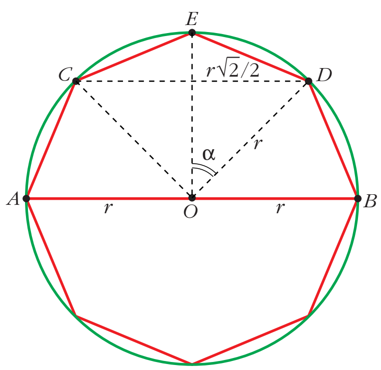
$$r^2 - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(No consideramos la raíz negativa, pues $x \in (0, r)$).

(En $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$; es decir, la longitud de la cuerda para la que obtenemos el área máxima es $CD = r\sqrt{2}$.

Observación 1:



Si completamos la figura anterior de forma simétrica, vemos que obtenemos un octógono regular:

$$sen\ \alpha = \frac{r\sqrt{2}/2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45°$$

es decir: $\widehat{EOD} = 45°$

Además:

$$\begin{cases} \widehat{EOC} = \widehat{EOD} \quad \rightarrow \quad \widehat{EOC} = 45° \\ \widehat{DOB} = 90° - \widehat{EOD} = 45° \\ \widehat{COA} = 90° - \widehat{EOC} = 45° \end{cases}$$

y $OA = OC = OE = OD = OB = r$

Por tanto, se trata de un octógono regular.

Así, hemos obtenido que el octógono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el octógono regular.

Observación 2:

En el ejercicio **91** obtuvimos el resultado para un triángulo, en el ejercicio **93** para un hexágono y en este ejercicio para un octógono.

En general, se tiene que el polígono de n lados inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el polígono regular de n lados.

11 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 304

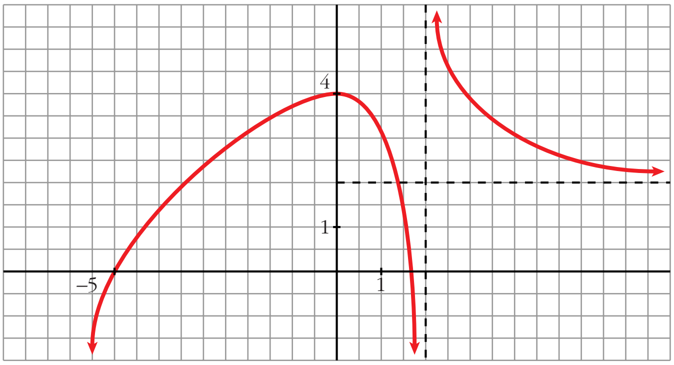
Descripción de una gráfica

1. ■ **Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.**

(La solución está en el propio ejercicio).

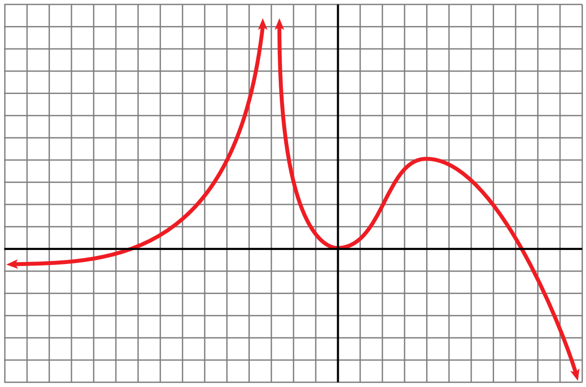
2. Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4;\ f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0;\ f(1{,}75) = 0$
- f **es derivable en todo** $\mathbb{R}$, **salvo en** $x = 2$.



Página 305

3. Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:



- $lím \ \ f(x) = -1$
- $lím \ \ f(x) = -\infty$
- $lím \ \ f(x) = +\infty$
- $lím \ \ f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0; \ f(0) = 0; \ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4; \ f'(4) = 0$

4. Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.

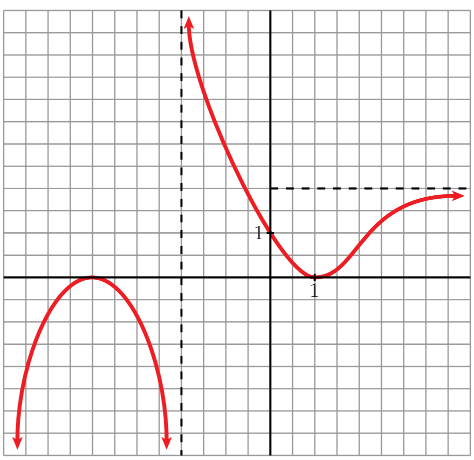
Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación?

¿Hay, acaso, error en la descripción?

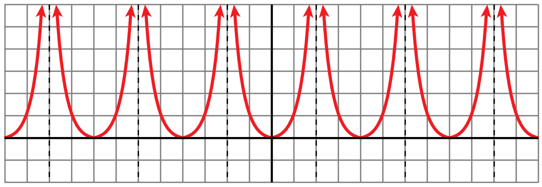
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $lím \ \ f(x) = -\infty; \quad lím \ \ f(x) = 2$
- $lím \ \ f(x) = -\infty; \quad lím \ \ f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0; \ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0; \ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa esta gráfica:



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad x = -7, \quad x = 12,$$
$$x = -400, \quad x = 13, \quad x = -199$$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0; \; f(1) = 1; \; f(3) = 1; \; f(-7) = 1$

  $f(12) = 0; \; f(-400) = 0; \; f(13) = 1; \; f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0; \; f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de periodo 4.

- Simetría $\rightarrow$ Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

  Periodicidad $\rightarrow$ Es periódica de periodo 4.

Página 306

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

2. Halla el dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 307

3. Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* $= \mathbb{R}$

$$f(-x) = sen\ (-x) + \frac{1}{2}\big(sen\ (-2x)\big) = -sen\ x - \frac{1}{2}\big(sen\ (2x)\big) = -f(x)$$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Página 308

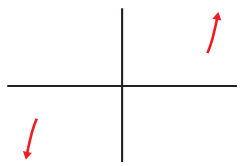
4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **e)** $y = ln(x^2 + 1)$ **f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\text{lím } f(x) = -\infty$
- $\text{lím } f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

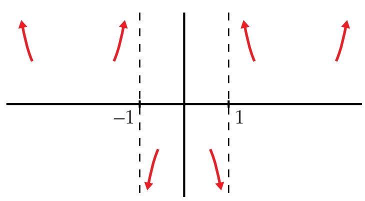
b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Ramas parabólicas

- $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } f(x) = -\infty$
- $\text{lím } f(x) = -\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



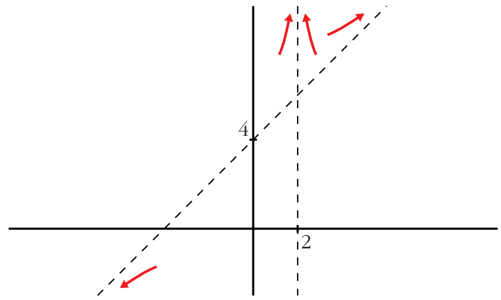
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{2\}$
- $\text{lím } f(x) = -\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) - (x+4) > 0 & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ f(x) - (x+4) < 0 & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

- $\text{lím } f(x) = +\infty$, $\text{lím } f(x) = +\infty$ $\Big\}$ $x = 2$ es asíntota vertical



d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

- *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

- $\text{lím } f(x) = +\infty$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = -1 \;\rightarrow\; \text{Hay asíntota oblicua.}$$

$$\text{lím } [f(x) + x] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 - 2x} + x\right] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \text{lím } \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = -x + 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

- $\text{lím } f(x) = +\infty$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 \;\rightarrow\; \text{Hay asíntota oblicua.}$$

$$\text{lím } [f(x) - x] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 - 2x} - x\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \text{lím } \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1$$

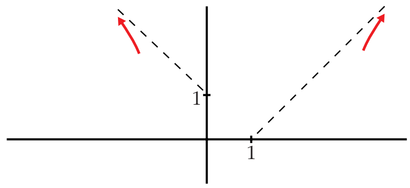
$y = x - 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

- No hay asíntotas verticales.

- Posición de la curva respecto a las asíntotas:

  $f(x) - (-x + 1) < 0$ si $x \to -\infty$

  $f(x) - (x - 1) < 0$ si $x \to +\infty$



e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\text{lím } f(x) = +\infty$

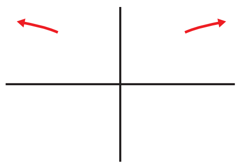
  $$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{ln(x^2+1)}{x} = \text{lím } \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

- $\text{lím } f(x) = +\infty$

  $$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{ln(x^2+1)}{x} = \text{lím } \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

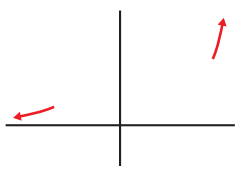
  } Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x.

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\text{lím } f(x) = 0 \to y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
- $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- No hay asíntotas verticales.



Página 309

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$

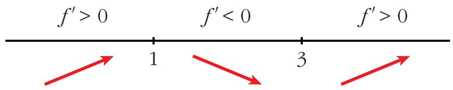
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

• $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

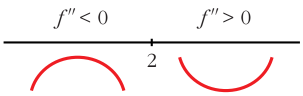


Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

• $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

• $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

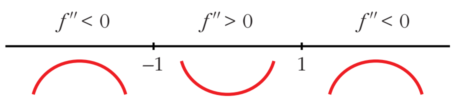
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array}\right\} \text{Hay un mínimo en } (0, 0).$$

• $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(-1, ln\ 2)$ y otro en $(1, ln\ 2)$.

6. Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	-2	$f' < 0$	0	$f' < 0$	2	$f' > 0$
↗		↘		↘		↗

Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	-1	$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$
↗		↗		↘		↘

Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - 2)^2 - x^3 \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{3x^2(x - 2) - 2x^3}{(x - 2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x - 2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x - 2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	6	$f' > 0$
↗		↗		↘		↗

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \notin$ *Dominio*.

No hay puntos singulares.

Página 311

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **b)** $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ **c)** $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

  $\text{lím}\ f(x) = +\infty$; $\text{lím}\ f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

  Puntos singulares: (0, 7); (–2, –9); (2, –9)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punto (0, 7)

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

  Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

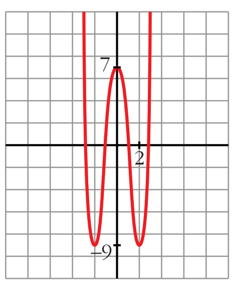
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \qquad = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

  Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

  $\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Puntos de inflexión:**

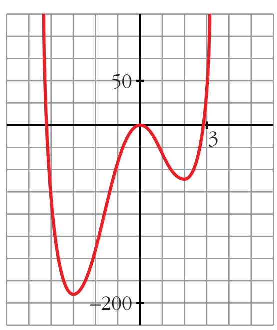
  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

  $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$

  Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

- **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$

  $$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

  $x = 0$

  $x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \rightarrow x = 2;\ x \approx 3{,}65;\ x \approx -1{,}65$

  Puntos: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

- **Puntos de inflexión:**

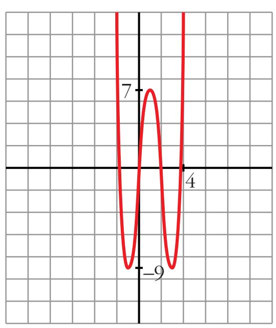
  $f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

  $$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \quad x \approx 2{,}15;\ x \approx -0{,}15$$

  Puntos: $(2{,}15; -1{,}83)$ y $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gráfica:**



2. **Representa las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = 3x^4 - 4x^3 - 16}$ **b)** $\boldsymbol{y = x^3 - 3x}$ **c)** $\boldsymbol{y = (1/4)\,x^4 - 2x^2}$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\text{lím}\ f(x) = +\infty; \quad \text{lím}\ f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

  Puntos: $(0, -16)$; $(1, -17)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = -16$ $\rightarrow$ Punto $(0, -16)$

  — Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $3x^4 - 4x^3 - 16 = 0$ $\rightarrow$

  $x = 2$

  $3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ $\rightarrow$ tiene una sola raíz, que está entre -2 y -1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

  Puntos $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre -2 y -1.

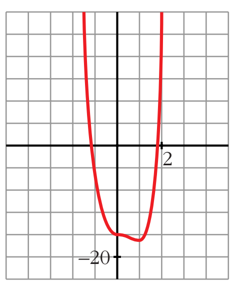
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

  Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\text{lím } f(x) = -\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 3) = 0$

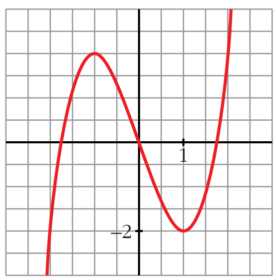
$\left.\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}\right\}$ Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow$ Punto (0, 0)

— Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \quad \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ \end{cases} \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

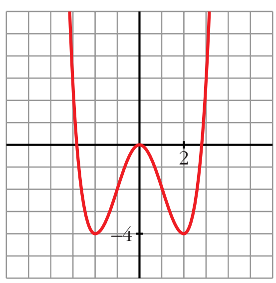
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = - \qquad = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \qquad = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Puntos: $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$; $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



Página 313

1. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} lím \quad f(x) = +\infty \\ \\ lím \quad f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} lím \ f(x) = +\infty \\ \\ lím \ f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

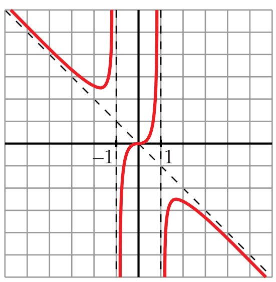
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ \end{array}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0.$$

• **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \quad \to \quad y = x - 2$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

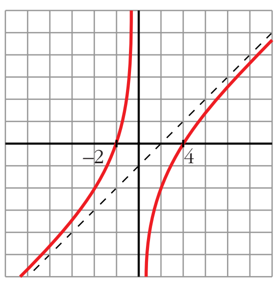
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

• **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

  $$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -2.$$

  $$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

  $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \to \quad y = 1$ es asíntota horizontal.

  Posición de la curva respecto a la asíntota:

  $f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

  $f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punto $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

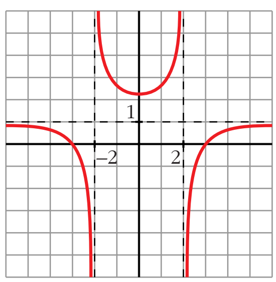
- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = \dfrac{9}{4} \quad \to \quad$ Punto $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

  — Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

  Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 + x^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^3 + 2x = 0$ $\rightarrow$ $x(x^2 + 2) = 0$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

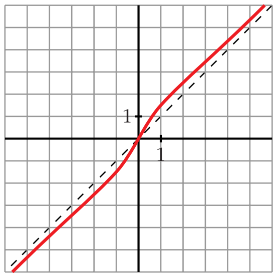
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Puntos: } (0, 0);\ \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right);\ \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Página 315

1. Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- **Dominio:**

$x^2 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\text{lím } [f(x) + x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \text{lím } \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\text{lím } [f(x) - x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 + 2x} - x] =$$

$$= \text{lím } \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \text{lím } \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow$ Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

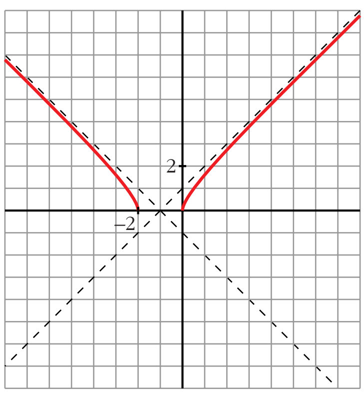
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + 2x} \;\rightarrow\; x^2 + 2x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$ y $(-2, 0)$

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- **Dominio:**

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\text{lím } [f(x) + x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \text{lím } \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \text{lím } \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\text{lím } [f(x) - x] = \text{lím } [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \text{lím } \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \text{lím } \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$. Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

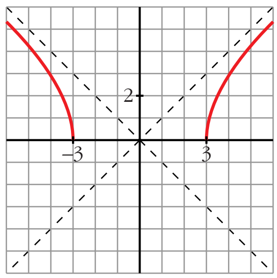
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $\sqrt{x^2 - 9}$ $\rightarrow$ $x^2 - 9 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3 \end{array} \right.$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

• **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $\boldsymbol{y = ln(x^2 + 4)}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x^2 - 1)}$

a) $y = ln\ (x^2 + 4)$

• **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, $D = \mathbb{R}$.

• **Simetrías:**

$f(-x) = ln\ (x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Ramas infinitas:**

$$\text{lím}\ f(x) = \text{lím}\ f(x) = +\infty$$

$$\text{lím}\ \frac{f(x)}{x} = \text{lím}\ \frac{ln\ (x^2 + 4)}{x} = \text{lím}\ \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

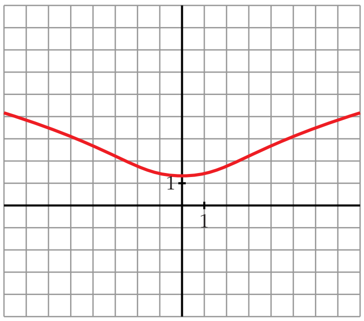
$f'(x) = 0$ $\rightarrow$ $2x = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, ln\ 4)$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{Puntos: } (-2, \ ln\ 8) \text{ y } (2, \ ln\ 8)$$

• **Gráfica:**



b) $y = ln\ (x^2 - 1)$

• **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \quad \to \quad D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Simetrías:**

$f(-x) = ln\ (x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• **Asíntotas verticales:**

$\text{lím}\ f(x) = -\infty; \quad \text{lím}\ f(x) = -\infty$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

• $\text{lím}\ f(x) = \text{lím}\ f(x) = +\infty$

$$\text{lím}\ \frac{f(x)}{x} = \text{lím}\ \frac{ln\ (x^2-1)}{x} = \text{lím}\ \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$. No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

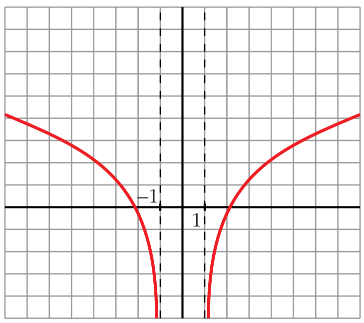
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; \ln(x^2-1) = 0 \;\to\; x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ \end{cases} \quad \text{Puntos: } \left(-\sqrt{2}, 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{2}, 0\right)$$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



Página 316

3. Representa: $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

$$y = \frac{e^x}{x^2}$$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = +\infty \\ \\ \lim f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim f(x) = 0$. Además $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

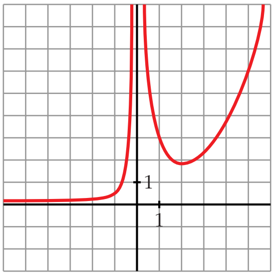
$\lim f(x) = +\infty$; $\quad \lim \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\;$ Punto $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$

• **Gráfica:**



4. **Representa:** $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x}$

$y = \dfrac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

• El periodo de $\cos x$ es 2π y el de $sen\ 2x$ es π. Por tanto, la función es periódica de periodo 2π. La estudiamos solo en este intervalo.

• Es **derivable** en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = -sen\ 2x - sen\ x = -2sen\ x \cos x - sen\ x = -sen\ x\,(2\cos x + 1)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -sen\ x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} sen\ x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \\ x = \pi \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\pi, -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\;$ Punto $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos 2x + 2\cos x = 0$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \begin{cases} \cos x = 0{,}366 \\ \cos x = -1{,}366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\cos x = 0{,}366 \begin{cases} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{cases}$$

Puntos: (1,2; 0); (5,09; 0)

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2\cos 2x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2\cos 2x - \cos x = 0$$

$$-2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

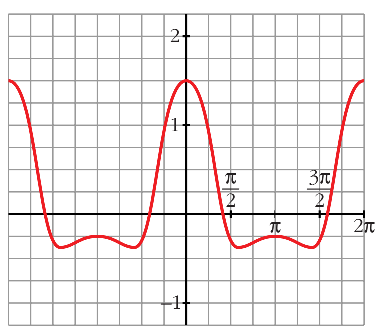
$$-2\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$-4\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \begin{cases} \cos x = -0{,}843 \\ \cos x = 0{,}593 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = -0{,}843 \begin{cases} x = 2{,}57 \\ x = 3{,}71 \end{cases} \\ \cos x = 0{,}593 \begin{cases} x = 0{,}94 \\ x = 5{,}35 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Puntos: } \begin{array}{l} (2{,}57; -0{,}63) \\ (3{,}71; -0{,}63) \\ (0{,}94; 0{,}44) \\ (5{,}35; 0{,}45) \end{array}$$

• **Gráfica:**



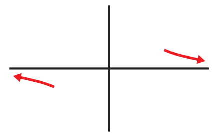
Página 317

1. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

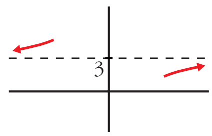
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$\text{lím} \ f(x) = \text{lím} \ f(x) = 0 \ \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$



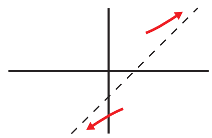
b) $y = \dfrac{3x}{x+1}$

$\text{lím} \ f(x) = \text{lím} \ f(x) = 3 \ \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 3$



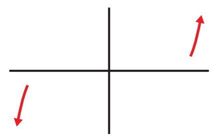
c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \ \rightarrow$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x - 1$



d) $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím} \ f(x) = +\infty; \quad \text{lím} \ \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \text{lím} \ f(x) = -\infty; \quad \text{lím} \ \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$



2. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

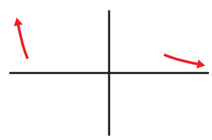
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ **c)** $y = x + \sqrt{x}$

d) $y = tg\ x$ **e)** $y = x\ sen\ x$ **f)** $y = x - cos\ x$

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

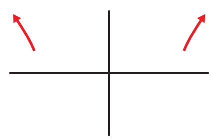
$\text{lím} \ f(x) = +\infty; \quad \text{lím} \ \dfrac{f(x)}{x} = -\infty.$ Rama parabólica.

$\text{lím} \ f(x) = 0.$ Asíntota horizontal: $y = 0$



b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím} \ f(x) = +\infty; \quad \text{lím} \ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \text{lím} \ f(x) = +\infty; \quad \text{lím} \ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

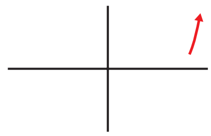


c) $y = x + \sqrt{x}$

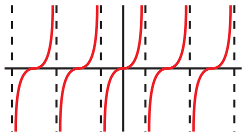
$\text{lím } f(x)$ no existe, pues solo está definida en $[0, +\infty)$.

$$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1 = m$$

$$\text{lím } [f(x) - x] = \text{lím } \sqrt{x} = +\infty$$

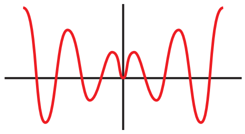


d) $y = tg\ x$



No existen $\text{lím } f(x)$ ni $\text{lím } f(x)$.

e) $y = x\ sen\ x$

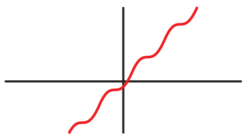


No existen $\text{lím } f(x)$ ni $\text{lím } f(x)$.

f) $y = x - cos\ x$

$$\text{lím } f(x) = -\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{x - cos\ x}{x} = \text{lím } \frac{1 + sen\ x}{1} \text{ no existe}$$

$$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{x - cos\ x}{x} \text{ no existe}$$



Página 324

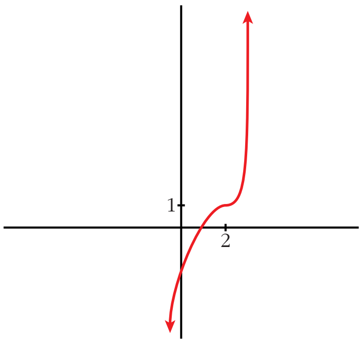
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \quad f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x.$$

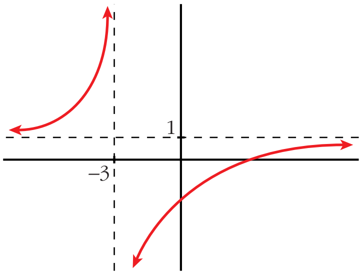


2 **Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:**

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



3 **De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:**

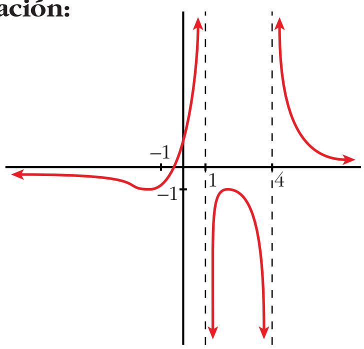
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.

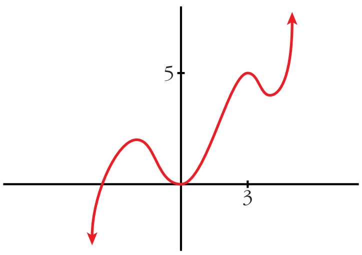


4 **S** **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ si $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$

$f(-2) = 2$; $f(0) = 0$; $f(3) = 5$; $f(4) = 4$



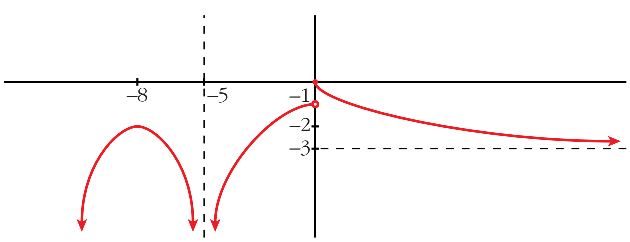
5 **S** **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

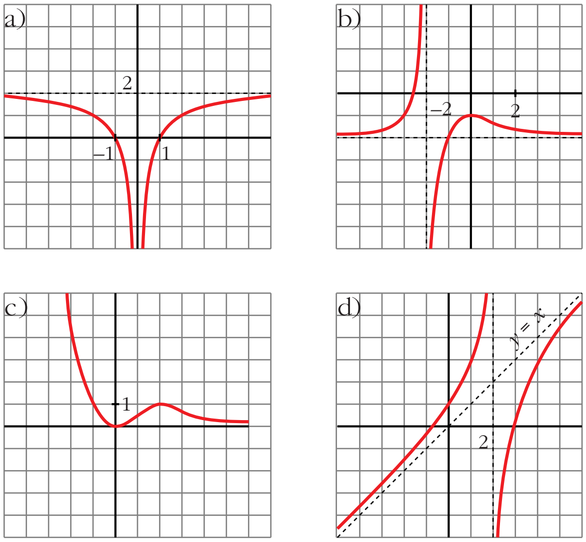
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ **es el único punto donde** $f(x)$ **se anula.**

$f'(-8) = 0$ **y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además,** $f'(x) < 0$ **para todo** x **positivo.**

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ **y** $x = 0$.



6 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**



a) • Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntotal horizontal: $y = 2$

$lím\ \ f(x) = 2; \quad lím\ \ f(x) = 2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$lím\ \ f(x) = -\infty; \quad lím\ \ f(x) = -\infty$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota vertical: $x = -2$. Asíntotal horizontal: $y = -2$

$lím\ \ f(x) = -2; \quad lím\ \ f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$lím\ \ f(x) = +\infty; \quad lím\ \ f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$

• Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$lím\ \ f(x) = +\infty; \quad lím\ \ f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:

  $f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

  $f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\textit{lím}\ f(x) = +\infty$; $\textit{lím}\ f(x) = -\infty$

- Puntos singulares: no tiene.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7
S **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 = -2 \;\to\;$ no tiene solución.

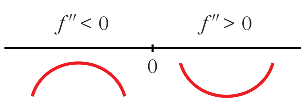
  $f'(x) > 0$ para todo $x \;\to\; f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

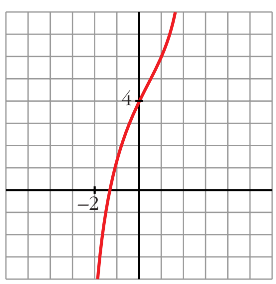
  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\textit{lím}\ f(x) = -\infty$; $\textit{lím}\ f(x) = +\infty$

- **Gráfica:**



8 **Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:**

S

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.

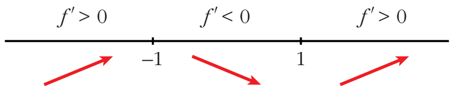
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

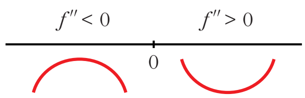
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:

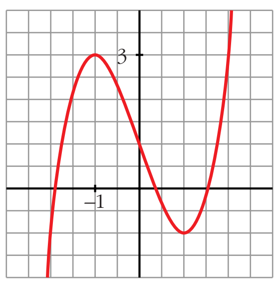


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



9 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim f(x) = 0; \qquad \lim f(x) = 0$$

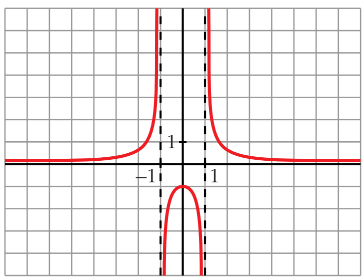
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = +\infty \\ \lim f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = -\infty \\ \lim f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

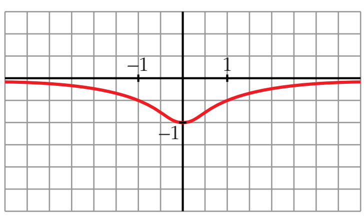
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim f(x) = 0; \qquad \lim f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$\lim f(x) = 0; \quad \lim f(x) = 0$

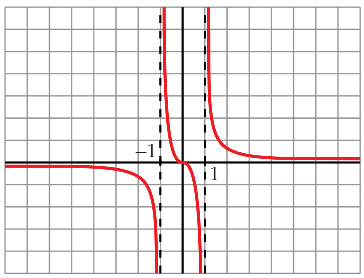
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = -\infty \\ \\ \lim f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = -\infty \\ \\ \lim f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

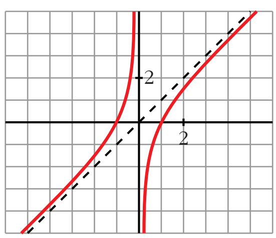
• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x) = +\infty \\ \\ \lim f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

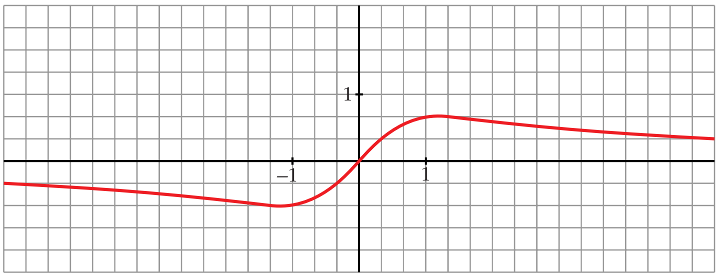
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\text{lím}\ f(x) = 0; \quad \text{lím}\ f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

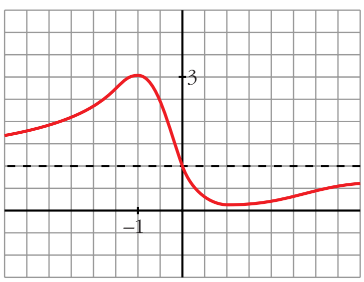
- **Asíntotas:**

$\text{lím}\ f(x) = 1; \quad \text{lím}\ f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**



Página 325

PARA RESOLVER

10 Representa las siguientes funciones estudiando previamente:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ | b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ | d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ | f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x - 2}$ | h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ | j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ | l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

m) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$ | n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

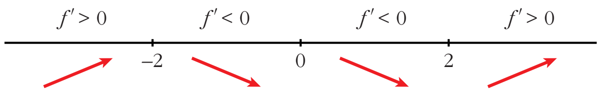
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de la derivada:



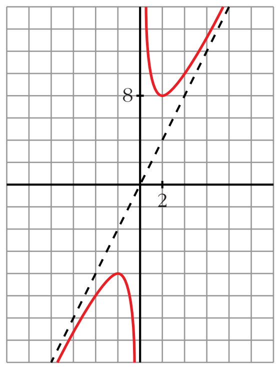
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

• **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$lím\ f(x) = 0$; $lím\ f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

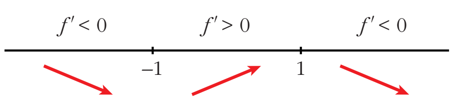
$$\left. \begin{array}{l} lím\ f(x) = -\infty \\ lím\ f(x) = -\infty \end{array} \right\} \ x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \ \to \ -2x + 2 = 0 \ \to \ x = 1$

Signo de $f'(x)$:

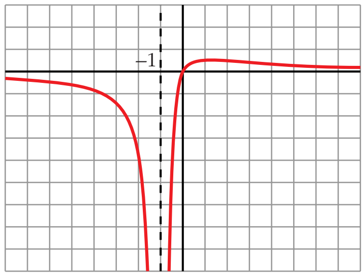


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

• **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -2$ es asíntota vertical

$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x^2-12) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ | $-\sqrt{12}$ | $f' < 0$ | -2 | $f' < 0$ | 0 | $f' < 0$ | 2 | $f' < 0$ | $\sqrt{12}$ | $f' > 0$

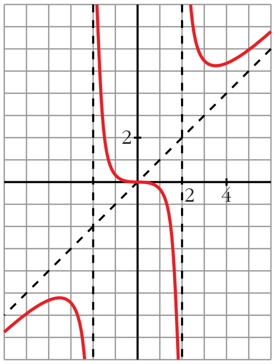
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$

0 | 1 | 2

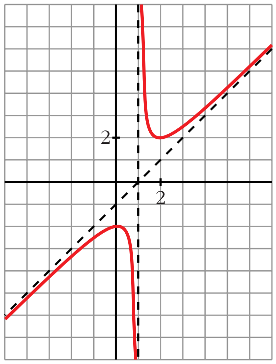
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$lím \ f(x) = 0; \qquad lím \ f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} lím \ f(x) = -\infty \\ lím \ f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

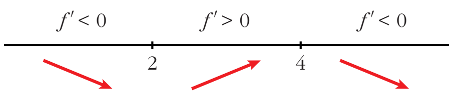
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \ \to \ -4x + 16 = 0 \ \to \ x = 4$

Signo de $f'(x)$:

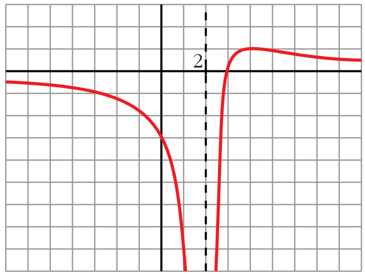


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$lím \;\; f(x) = 0; \qquad lím \;\; f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

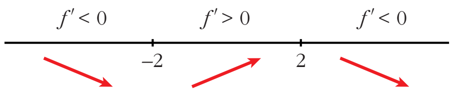
$$\left.\begin{array}{l} lím \;\; f(x) = +\infty \\ \\ lím \;\; f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; -x - 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = -2$

Signo de $f'(x)$:

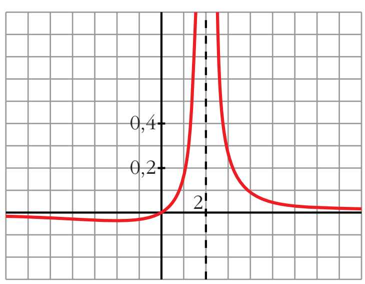


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

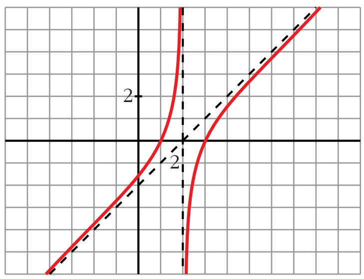
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to \quad$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- **Asíntotas:**

$\text{lím } f(x) = -1, \quad \text{lím } f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 18x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

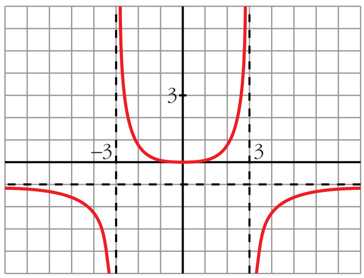
$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$
↘	-3	↘	0	↗	3	↗

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	–2	↘	0	↘	2	↗

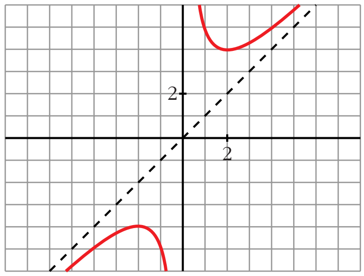
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$
- **Asíntotas:**

$\text{lím } f(x) = 1; \quad \text{lím } f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

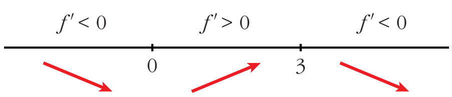
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

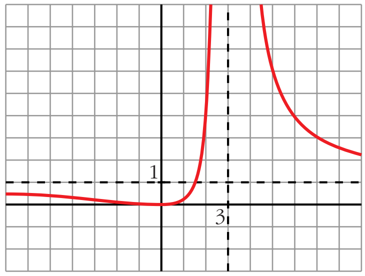


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $y = 2x$ es asíntota oblicua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

  $$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

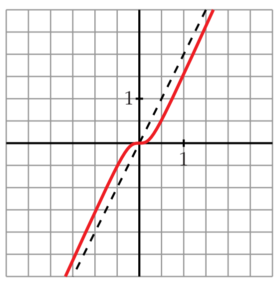
  $f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2(x^2 + 3) = 0 \;\to\; x = 0$

  Signo de $f'(x)$:

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

  $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

- **Gráfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\[2ex] \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3(x^2-8) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↘	$-\sqrt{8}$	↗	-2	↗	0	↘	2	↘	$\sqrt{8}$	↗

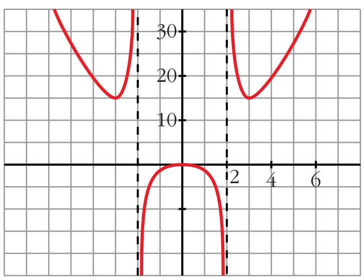
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

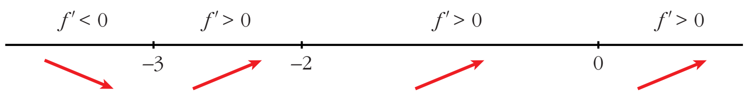
$$\left.\begin{array}{ll} \text{lím } f(x) = +\infty; & \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty; & \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



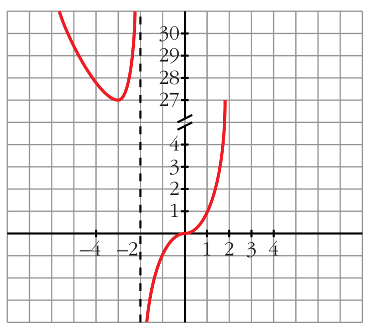
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

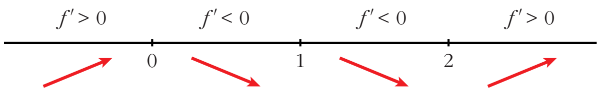
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



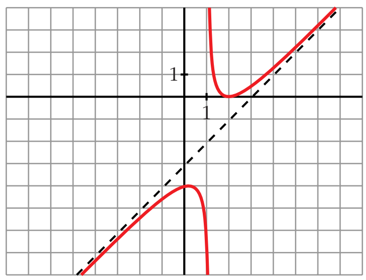
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

- **Gráfica:**



11 **S** **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ es asíntota oblicua.

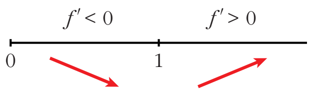
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$)

Signo de $f'(x)$:



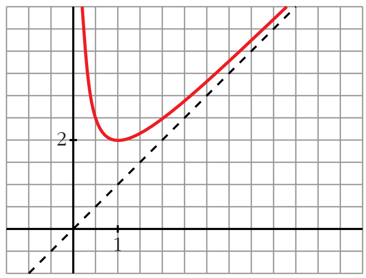
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

es creciente en $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



12
S **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$**, se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f**.**

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím}\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \text{lím}\ \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\text{lím}\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

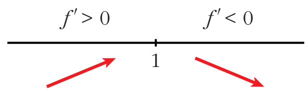
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 1 - x = 0 \;\to\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

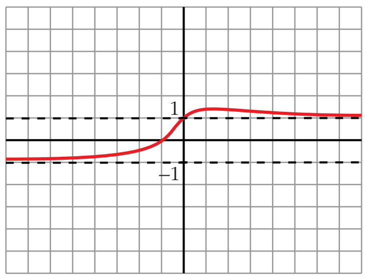


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $(1, \sqrt{2})$

c)



13 **S** **Representa gráficamente la función: $p(x) = x^4 + 4/3\, x^3 + 2x^2 - 2$**

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

- $\lim\ p(x) = +\infty; \quad \lim\ p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

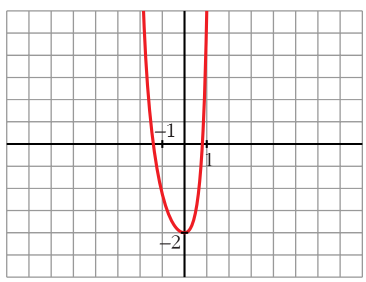
  $p'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \;\rightarrow\;$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

14 **S** **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \text{lím } f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = -\sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = \sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{lím } \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$(f(x) > 0)$$

$$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \rightarrow \ \text{Rama parabólica}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	$-\sqrt{3}$	$f' > 0$	-1	$f' < 0$	$\sqrt{3}$	$f' < 0$	3	$f' > 0$

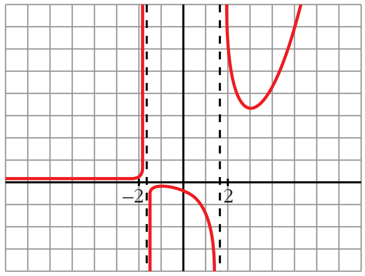
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

tiene un máximo en $\left(-1, \dfrac{-1}{2e}\right)$

tiene un mínimo en $\left(3, \dfrac{e^3}{6}\right)$

• **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

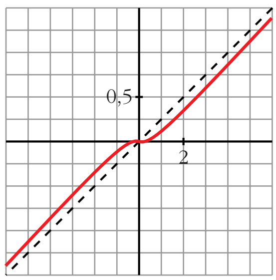
• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; x^2(4x^2 + 3) = 0 \;\;\to\;\; x = 0 \;\;\to\;\; (0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \;\;\to\;\; f(x)$ es creciente $\big($tiene un punto de inflexión en $(0, 0)\big)$

• **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x - 1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = +\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \;\; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

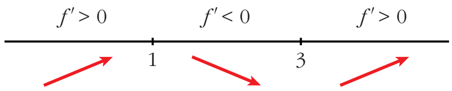
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\rightarrow\; x - 1 = 2 \;\rightarrow\; x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

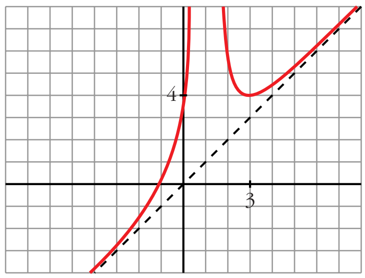


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím } f(x) = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2\right] = +\infty$$

$$m = \text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2-4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \text{lím } [f(x) + 2x] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2-4} + x - 2 - 2x\right] =$$

$$= \text{lím } \left[\sqrt{x^2-4} - x - 2\right] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2-4} - (x+2)\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left[\sqrt{x^2-4} - (x+2)\right]\left[\sqrt{x^2-4} + (x+2)\right]}{\left[\sqrt{x^2-4} + (x+2)\right]} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - 4 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2-4} + x + 2} = \text{lím } \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2-4} + x + 2} =$$

$$= \quad \text{lím} \quad \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -2x - 2)$

$$\text{lím} \;\; f(x) = \;\; \text{lím} \;\; \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

$(f(x) < -2)$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

$f'(x) = 0 \;\to\; x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \;\to\; x = \sqrt{x^2 - 4} \;\to\; x = x^2 - 4 \;\to$

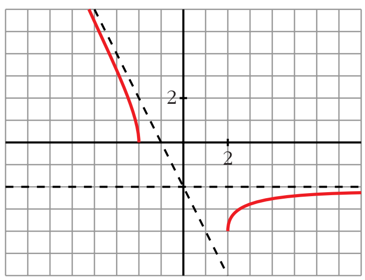
$\to$ no tiene solución $\to$ no hay puntos singulares

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$	-2	no existe	2	$f' > 0$
$\searrow$				$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

- **Gráfica:**



15 **Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = \text{sen}\, x + \cos x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh\, x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; e^x + e^{-x} = 0 \;\to\;$ no tiene solución $\to$

$\to$ no hay máximos ni mínimos

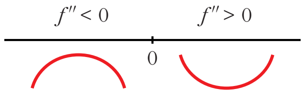
$f'(x) > 0$ para todo $x \;\to\; f(x)$ es creciente

• $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0$

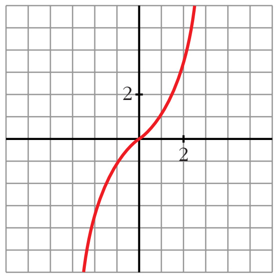
$e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**

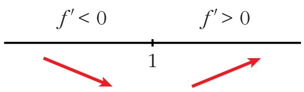


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathit{cosh}\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

• $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Signo de $f'(x)$:

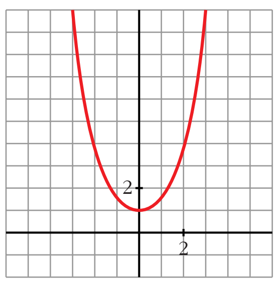


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

• $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\;$ no tiene solución $\;\rightarrow\;$ no hay puntos de inflexión

• **Gráfica:**

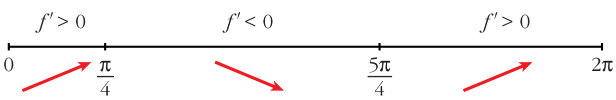


c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\ x = sen\ x \quad \rightarrow \quad tg\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:

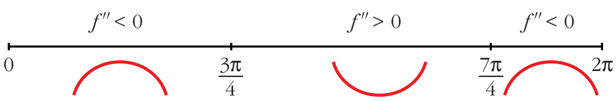


Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

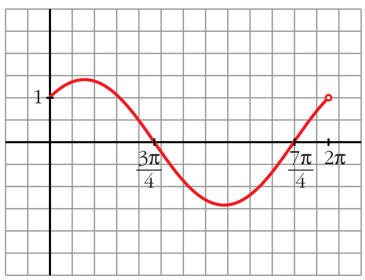
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ x = -cos\ x \quad \rightarrow \quad tg\ x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



16 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\ x}{x}$

c) $y = x\ ln\ x$ **d)** $y = (x - 1)\,e^x$

e) $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^3}{ln\ x}$ **h)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

•

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$lím \;\; f(x) = -\infty; \quad lím \;\; \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\; \rightarrow \;\; \text{Rama parabólica}$$

  $$lím \;\; f(x) = \;\; lím \;\; \frac{x}{e^x} = \;\; lím \;\; \frac{1}{e^x} = 0$$

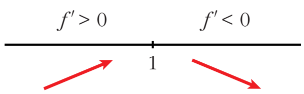
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

  $f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; 1 - x = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 1$

  Signo de $f'(x)$

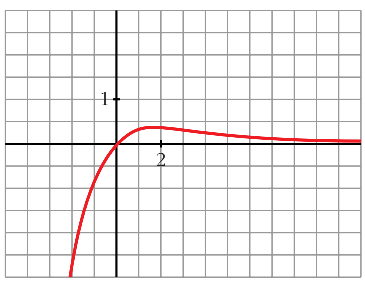
  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

  es decreciente en $(1, +\infty)$

  tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{ln\, x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  $lím \;\; f(x) = -\infty \;\; \rightarrow \;\; x = 0$ es asíntota vertical

$$\text{lím } f(x) = \text{lím } \frac{1/x}{x} = 0$$

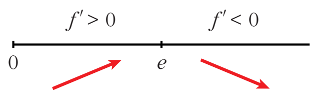
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \ln x = 1 \;\to\; x = e$$

Signo de $f'(x)$:



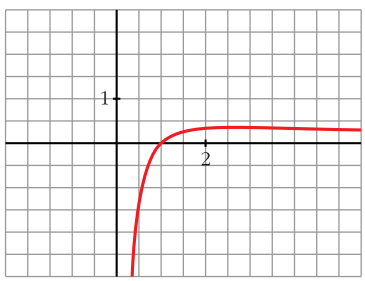
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\text{lím } x \ln x = \text{lím } \frac{\ln x}{1/x} = \text{lím } \frac{1/x}{-1/x^2} = \text{lím } (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\; \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; ln\,x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$ $\quad$ $f' > 0$

$0 \qquad \dfrac{1}{e}$

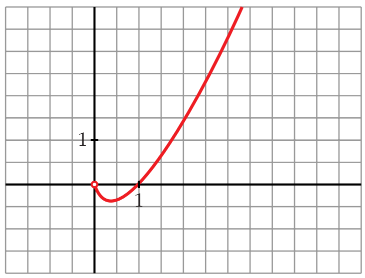
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$lím\; f(x) = lím\; (-x - 1)e^{-x} = lím\; \dfrac{-x - 1}{e^x} = lím\; \dfrac{-1}{e^x} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ $(f(x) < 0)$.

$lím\; f(x) = +\infty; \quad lím\; \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\rightarrow$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$ $\quad$ $f' > 0$

0

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\text{lím } f(x) = \text{lím } f(x) = 0$

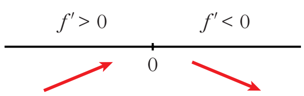
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

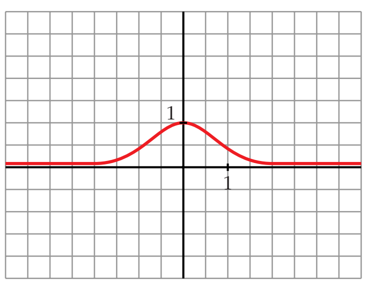


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

• **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím}\ f(x) = +\infty; \quad \text{lím}\ \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\text{lím}\ f(x) = +\infty; \quad \text{lím}\ \frac{x^2}{e^x} = \text{lím}\ \frac{2x}{e^x} = \text{lím}\ \frac{2}{e^x} = 0$$

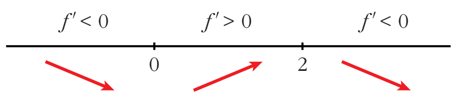
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



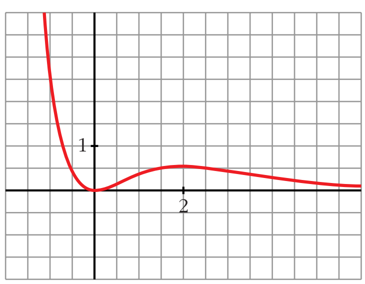
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^3}{ln\ x}$

- **Dominio:**

$ln\ x = 0 \quad \to \quad x = 1.$ Además, ha de ser $x > 0$.

$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$lím\ \ f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} lím\ \ f(x) = -\infty \\ \\ lím\ \ f(x) = +\infty \end{array}\right\}\quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

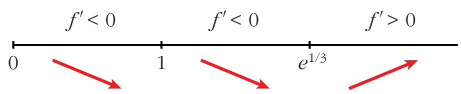
$lím\ \ f(x) = +\infty; \quad lím\ \ \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow$ Rama parabólica

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2\, ln\, x - x^3 \cdot (1/x)}{(ln\, x)^2} = \frac{3x^2\, ln\, x - x^2}{(ln\, x)^2} = \frac{x^2(3\, ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(3ln\, x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ ln\, x = 1/3 \quad \rightarrow \quad x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

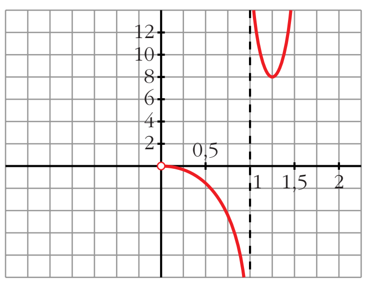


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$

• **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$lím\ \ f(x) = -\infty \quad \rightarrow \quad x = -1$ es asíntota vertical

$lím\ \ f(x) = -\infty \quad \rightarrow \quad x = 1$ es asíntota vertical

$$\left.\begin{array}{ll} lím\ f(x) = +\infty; & lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ lím\ f(x) = +\infty; & lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 2x = 0 \;\to\; x = 0$

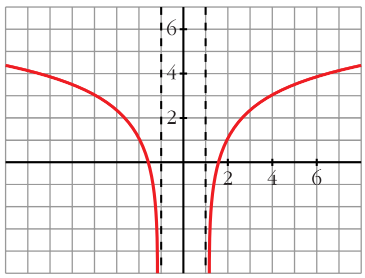
  No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

  $ln(x^2 - 1) = 0 \;\to\; x^2 - 1 = 1 \;\to\; x^2 = 2 \;\left\langle\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ \end{array}\right.$

  Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**



17 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

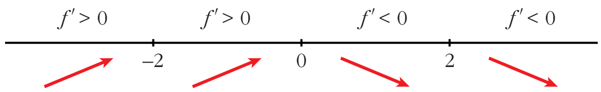
$$\left.\begin{array}{ll} lím\ f(x) = -\infty; & lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ lím\ f(x) = -\infty; & lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \;\to\; f(x)$ NO es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$

  $f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$



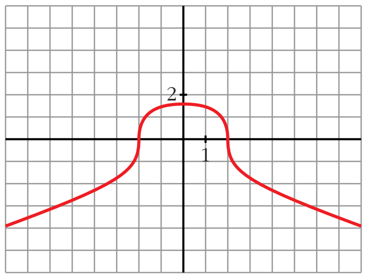
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\text{lím } [f(x) + x] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 + x} - x\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left[\sqrt{x^2 + x} - x\right]\left[\sqrt{x^2 + x} + x\right]}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \text{lím } \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$lím \ [f(x) - x] = \ lím \ [\sqrt{x^2 - x} \ - x] =$$

$$= \ lím \ \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x]\,[\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \ lím \ \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \ lím \ \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2}\right)$.

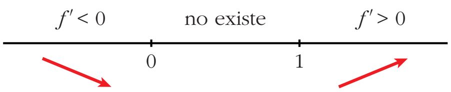
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \ \to \ 2x - 1 = 0 \ \to \ x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares $\left(\text{en } x = \frac{1}{2} \text{ no está definida } f(x)\right)$.

Signo de $f'(x)$:

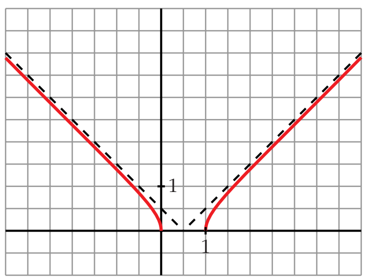


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$

es creciente en $[1, +\infty)$

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- **Dominio:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \ \to \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \ \to \ \text{no tiene solución}$$

$f(x) > 0$ para todo x

$D = \mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\textit{lím} \; f(x) = +\infty$$

$$\textit{lím} \; \frac{f(x)}{x} = \textit{lím} \; \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\textit{lím} \; [f(x) + x] = \textit{lím} \; [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] =$$

$$= \textit{lím} \; \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

$$= \textit{lím} \; \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \textit{lím} \; \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\textit{lím} \; f(x) = +\infty$$

$$\textit{lím} \; \frac{f(x)}{x} = \textit{lím} \; \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\textit{lím} \; [f(x) - x] = \textit{lím} \; [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$$

$$= \textit{lím} \; \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$$

$$= \textit{lím} \; \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \textit{lím} \; \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

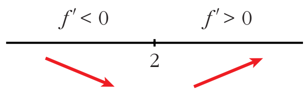
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) > x - 2\right)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x - 2 = 0 \;\to\; x = 2$$

Signo de $f'(x)$

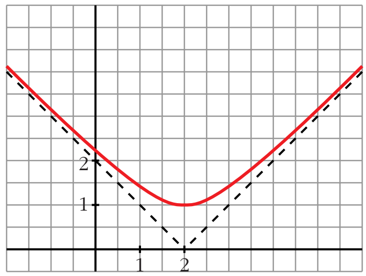


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$

es creciente en $(2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(2, 1)$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:** $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

$\text{lím } f(x) = +\infty \rightarrow x = -1$ es asíntota vertical

$\text{lím } f(x) = +\infty \rightarrow x = 1$ es asíntota vertical

$\text{lím } f(x) = +\infty$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{lím } \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\text{lím } [f(x) + x] = \text{lím } \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{} =$$

$$= \text{lím } \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$= \quad lím \quad \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \quad lím \quad \frac{x^4 - x^4 + x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \quad lím \quad \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} =$$

$$= \quad lím \quad \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$lím \ \ f(x) = +\infty$

$$lím \ \frac{f(x)}{x} = lím \ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x^2 - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \ \ \text{(no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$

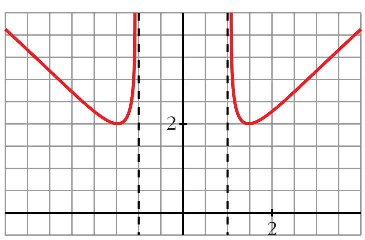
$f' < 0$		$f' > 0$		no existe		no existe		$f' < 0$		$f' > 0$
	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$

- **Gráfica:**

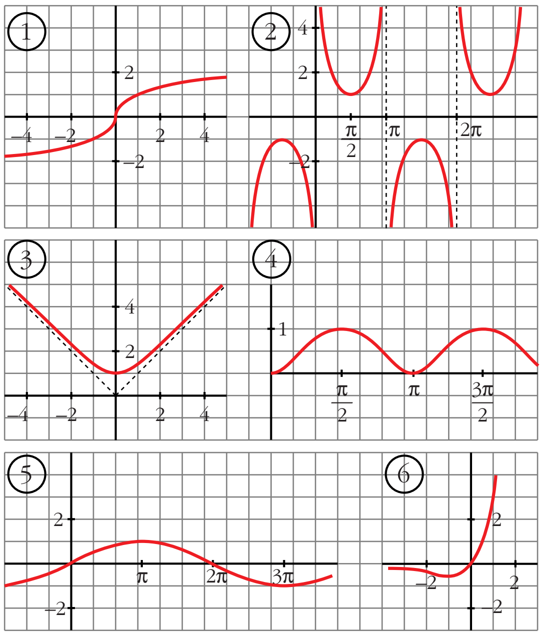


18 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las que están representadas a continuación:**

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$ **b)** $y = x\,e^{x}$

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **f)** $y = sen^2\ x$



a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- **Dominio:**

  $sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x = 0 + \pi k;\ \ k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\},\ \ k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

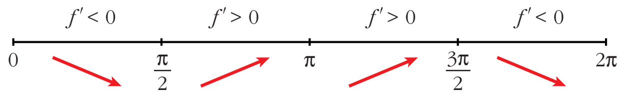
  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{sen^2\ x}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ es periódica de periodo 2π.

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gráfica** $\to$ 2

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím } f(x) = \text{lím } -xe^{-x} = \text{lím } \frac{-x}{e^x} = \text{lím } \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

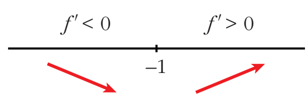
$$\text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 + x = 0 \quad \to \quad x = -1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

- **Gráfica** $\to$ 6

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

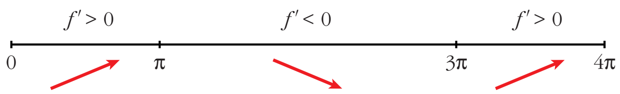
- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\ cos\ \dfrac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ \dfrac{x}{2} = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \ \rightarrow \ x = \pi + 2\pi k$

$f(x)$ es periódica de periodo 4π.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$

tiene un máximo en $(\pi, 1)$

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$

- **Gráfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} lím\ \ f(x) = -\infty; \quad lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ lím\ \ f(x) = +\infty; \quad lím\ \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ \rightarrow \ f(x)$ no es derivable en $x = 0$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \quad \to \quad f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\text{lím } f(x) = +\infty$$

$$\text{lím } \frac{f(x)}{x} = \text{lím } \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\text{lím } [f(x) - x] = \text{lím } \left[\sqrt{x^2 + 1} - x\right] =$$

$$= \text{lím } \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \text{lím } \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \text{lím } \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

Por simetría:

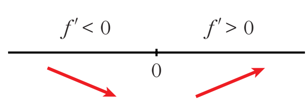
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

- **Gráfica** $\to$ 3

f) $y = sen^2\, x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

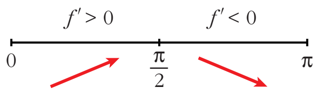
- **Extremos:**

  $f'(x) = 2sen\, x \cos x = sen\, 2x$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\, 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}\, k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

  $f(x)$ es periódica de periodo π.

  Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



  $f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

  es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

  tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

  tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$

- **Gráfica** $\rightarrow$ 4

Página 326

19 **S** **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k y representa la función.**

- **Hallamos k:**

  Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$lím \; \frac{f(x)}{x} = 2; \qquad lím \;\; [f(x) - 2x] = 6$$

  Por tanto:

$$lím \;\; f(x) = +\infty; \qquad lím \; \frac{f(x)}{x} = lím \; \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$lím \;\; [f(x) - 2x] = lím \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = lím \; \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= lím \; \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \;\rightarrow\; k = 3$$

Luego: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{lím}\ f(x) = -\infty \\ \\ \textit{lím}\ f(x) = +\infty \end{array}\right\}\quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

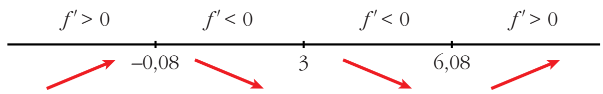
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2 - 12x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



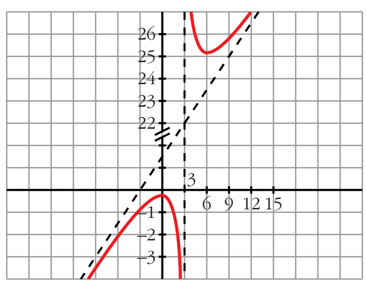
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$

- **Gráfica:**



20 **S** **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto *P*.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje *OX*.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{10}{9}(x-2) \;\rightarrow\; y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$

b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\}$ El punto es $\left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\}$ El punto es $\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$

21 **S** **Dada la función $f(x) = x^2\,|x-3|$ halla:**

a) Los puntos en los que f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \ge 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{array}\right.$

– **Si $x \pm 3$, tenemos que:** $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{array}\right.$

Por tanto:

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \; (\text{Punto } (3, 0)). \end{array}$

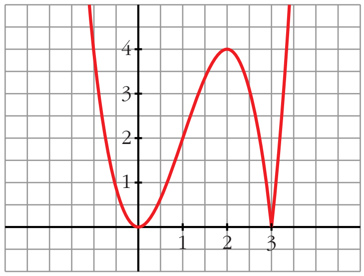
b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -3x^2 + 6x = 0 \;\text{ si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \;\begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; (2, 4) \end{array} \\ 3x^2 - 6x = 0 \;\text{ si } x > 3 \;\rightarrow\; \text{ninguno} \end{array}\right.$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim f(x) = +\infty$; $\lim f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



22 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$\lim f(x) = \lim \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

$\lim f(x) = \lim \dfrac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$

23 **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para ese valor de a y b, representa la función.**

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$; $f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} a = 2;\ b = 2$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} lím\ \ f(x) = -\infty \\ \\ lím\ \ f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \ \text{ es asíntota vertical}$$

$f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x} \quad \to \quad y = 2x + 2$ es asíntota oblicua

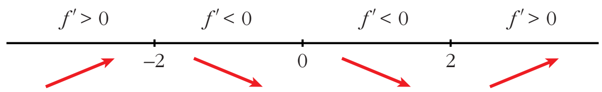
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



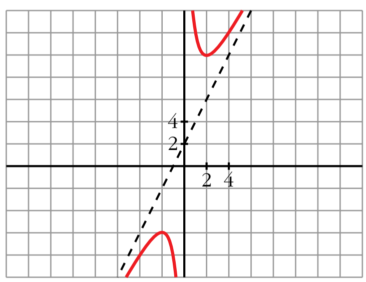
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -6)$

tiene un mínimo en $(2, 10)$

• **Gráfica:**



24 **Estudia y representa $y = arc\ tg\ x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = arc\ tg\ x$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = \text{lím } \dfrac{\text{arc tg } x}{x} = \text{lím } \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \\ \text{lím } f(x) = +\infty; \quad \text{lím } \dfrac{f(x)}{x} = \text{lím } \dfrac{\text{arc tg } x}{x} = \text{lím } \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Ramas parabólicas.

- **Crecimiento y extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

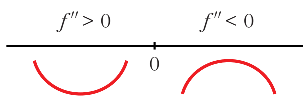
  $f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

  $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

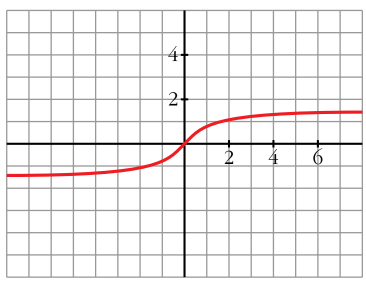
  $f''(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



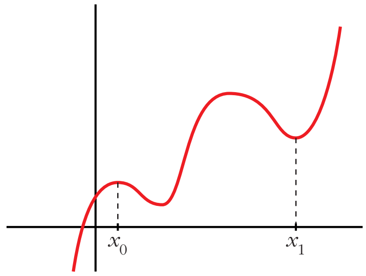
CUESTIONES TEÓRICAS

25 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.

26 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f'(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

27 **La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{lím } f(x) = \text{ lím } \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

28 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio **18**, es la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

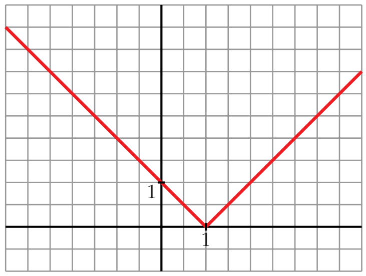
29
S **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \text{Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



30 **S** **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

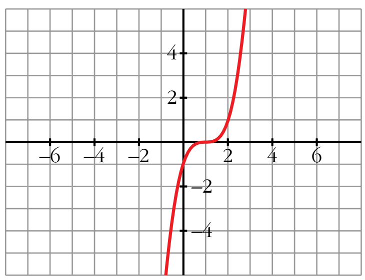
Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \quad \rightarrow \quad f'(1) = 0$

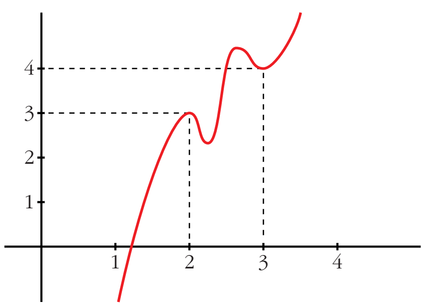
$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



31 **S** **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4). Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?**



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

Página 327

PARA PROFUNDIZAR

32 **Representa la función $y = x - arc\ tg\ x$ determinando el dominio de definición, asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.**

$y = x - arc\ tg\ x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

$$lím\ f(x) = -\infty; \quad lím\ \frac{f(x)}{x} = lím\ \frac{x - arc\ tg\ x}{x} = lím\ \left[1 - \frac{arc\ tg\ x}{x}\right] =$$

$$= lím\ \left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right] = 1 - 0 = 1 \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$lím\ f(x) = +\infty; \quad lím\ \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

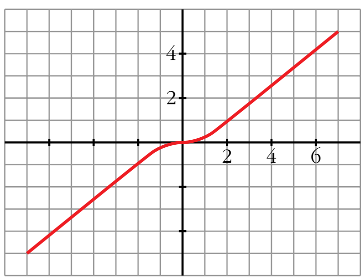
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0$

$f'(x) > 0$ para $x \neq 0 \quad \to \quad f(x)$ es creciente

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

No tiene máximos ni mínimos.

- **Gráfica:**



33 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

c) $y = ln(sen\ x)$ **d)** $y = 2x + sen\ 2x$

e) $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$ **f)** $y = \dfrac{cos\ x}{x}$

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- **Dominio:**

  $e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x = e^{-x} \;\rightarrow\; x = 0$

  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} lím \;\; f(x) = -\infty \\ \\ lím \;\; f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \;\text{ es asíntota vertical}$$

  $lím \;\; f(x) = -1 \;\rightarrow\; y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ $(f(x) < -1)$

  $lím \;\; f(x) = 1 \;\rightarrow\; y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ $(f(x) > 1)$

b) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No hay asíntotas verticales.

  $lím \;\; \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ $(f(x) > 0)$

  $lím \;\; \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \;\rightarrow\; y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ $(f(x) < 1)$

c) $y = ln\,(sen\, x)$

- **Dominio:**

  Solo está definida cuando $sen\, x > 0$; es decir, en los intervalos $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$ $\cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$

  El dominio son todos los intervalos de la forma: $\big(2k\pi, (2k + 1)\pi\big)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} lím \;\; f(x) = -\infty \\ \\ \quad lím \qquad f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2k\pi;\;\; x = (2k + 1)\pi \\ \text{son asíntotas verticales } \;(k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

  No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

  (No existe $\;lím \;\; f(x)\;$ ni $\;lím \;\; f(x)$).

d) $y = 2x + sen\; 2x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas.

$$\text{lím}\ \ f(x) = +\infty$$

$$\text{lím}\ \ \frac{f(x)}{x} = \ \text{lím}\ \ \frac{2x + sen\ 2x}{x} = 2$$

$$\text{lím}\ \ [f(x) - 2x] = \ \text{lím}\ \ sen\ 2x \ \text{ no existe.}$$

(Análogo razonamiento cuando $x \to -\infty$).

e) $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\text{lím}\ \left[\frac{sen\ x}{x} + 2\right] = 3. \ \text{ No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\text{lím}\ \ f(x) = \ \text{lím}\ \ f(x) = 2 \ \ \to \ \ y = 2 \ \text{ es asíntota horizontal.}$$

(La curva corta a la asíntota infinitas veces).

f) $y = \dfrac{cos\ x}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím}\ \ f(x) = -\infty \\ \\ \text{lím}\ \ f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ \ x = 0 \ \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{lím}\ \ f(x) = \ \text{lím}\ \ f(x) = 0$$

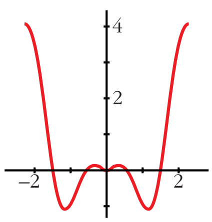
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(La curva corta a la asíntota horizontal infinitas veces).

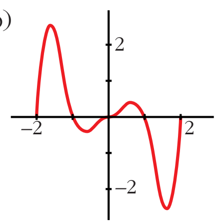
34 S **Las siguientes gráficas corresponden a las funciones $f(x) = x\ sen(\pi x)$; $g(x) = x^2\ sen(\pi x)$; $h(x) = x^2\ cos(\pi x)$ en el intervalo [–2, 2].**

Relaciona, de forma razonada, cada gráfica con su correspondiente función.

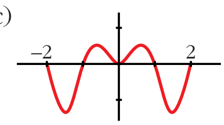
a)



b)



c)



• $f(x)$ y $h(x)$ son funciones pares y $g(x)$ es impar.

Por tanto, la gráfica de $g(x)$ ha de ser la b).

• $f(2) = 0 \rightarrow$ la gráfica de $f(x)$ es la c).

Luego la gráfica de $h(x)$ es la a).

• Es decir: a) $h(x)$; b) $g(x)$; c) $f(x)$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

35 **Para averiguar las asíntotas de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ tuvimos que realizar un notable esfuerzo (páginas 314 y 315). Sin embargo, utilizando el sentido común y casi sin ningún tecnicismo, podríamos haberlo resuelto fácilmente. Veamos cómo:**

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$$

Es decir, nuestra función, para valores grandes de $|x|$, *se aproxima mucho* a $y = |x - 1|$.

Además, es "un poco menor" (observa que se resta 1 en el radicando). La función $y = |x - 1|$ está formada, precisamente, por las dos asíntotas de nuestra función.

a) Averigua, de forma similar, las asíntotas de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \qquad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Ídem $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$

La función $y = |x + 1|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función $y = \sqrt{x^2 + 2x}$.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|$$

La función $y = |x - 3|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$.

b) Para valores grandes de $|x|$, tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \approx \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Así, $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

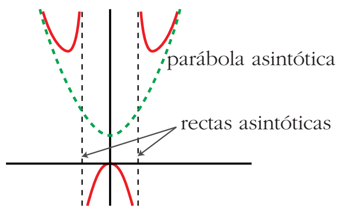
36 **Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son *asintóticas* cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.**

Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es *asintótica* a la función:

$y = f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa su gráfica en la página 337).

Es fácil comprobarlo: $\dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (Simplemente hemos efectuado el cociente.)

La diferencia entre las dos funciones es $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ que tiende a cero cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. Además, toma valores positivos, por lo que la curva de $y = f(x)$ queda por encima de la parábola. Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:



a) Razonando igual, halla la parábola asintótica a la función:

$y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}$ y determina la posición de la curva respecto a ella.

b) Representa la gráfica de la función teniendo en cuenta esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (solo hay uno de abscisa $x = 2$).

a) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{8}{x}$

La parábola es $y = x^2 - 2x + 1$.

- Cuando $x \to -\infty$, la diferencia entre la función y la parábola, $\dfrac{8}{x}$, es negativa; luego, la curva está por debajo de la parábola.

- Cuando $x \to +\infty$, la diferencia, $\dfrac{8}{x}$, es positiva; luego, la curva está por encima de la parábola.

b) **Asíntota vertical:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím } f(x) = -\infty \\ \text{lím } f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

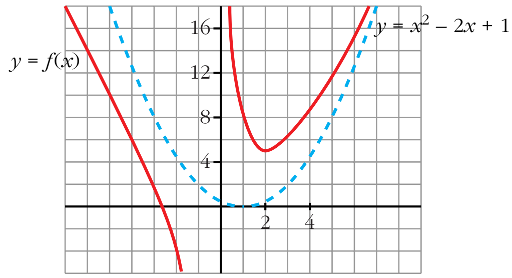
• **Punto singular:**

$f'(x) = 2x - 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Hay un mínimo en $(2, 5)$.

• **Gráfica:**



12 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Página 328

Concepto de primitiva

■ **Números y potencias sencillas**

1. a) $\int \mathbf{1} = x$ **b)** $\int \mathbf{2} = 2x$ **c)** $\int \sqrt{\mathbf{2}} = \sqrt{2}\,x$

2. a) $\int \mathbf{2x} = x^2$ **b)** $\int \mathbf{x} = \dfrac{x^2}{2}$ **c)** $\int \mathbf{3x} = \dfrac{3x^2}{2}$

3. a) $\int 7\mathbf{x} = \dfrac{7x^2}{2}$ **b)** $\int \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}} = \dfrac{x^2}{6}$ **c)** $\int \sqrt{\mathbf{2}}\,\mathbf{x} = \dfrac{\sqrt{2}\,x^2}{2}$

4. a) $\int \mathbf{3x^2} = x^3$ **b)** $\int \mathbf{x^2} = \dfrac{x^3}{3}$ **c)** $\int \mathbf{2x^2} = \dfrac{2x^3}{3}$

5. a) $\int \mathbf{6x^5} = x^6$ **b)** $\int \mathbf{x^5} = \dfrac{x^6}{6}$ **c)** $\int \mathbf{3x^5} = \dfrac{3x^6}{6} = \dfrac{x^6}{2}$

Página 329

■ **Potencias de exponente entero**

6. a) $\int (\mathbf{-1})\,\mathbf{x^{-2}} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ **b)** $\int \mathbf{x^{-2}} = \dfrac{x^{-1}}{-1} = \dfrac{-1}{x}$ **c)** $\int \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{x^2}} = \dfrac{-5}{x}$

7. a) $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^3}} = \int x^{-3} = \dfrac{x^{-2}}{-2} = \dfrac{-1}{2x^2}$ **b)** $\int \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^3}} = 2\int \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{-2}{2x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$

8. a) $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x-3)^3}} = \int (x-3)^{-3} = \dfrac{(x-3)^{-2}}{-2} = \dfrac{-1}{2(x-3)^2}$

b) $\int \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{(x-3)^3}} = 5\int \dfrac{1}{(x-3)^3} = \dfrac{-5}{2(x-3)^2}$

■ **Las raíces también son potencias**

9. a) $\int \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{x^{1/2}} = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$ **b)** $\int \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{x}} = \int \dfrac{3}{2}x^{1/2} = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

10. a) $\int \sqrt{x} = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ **b)** $\int 7\sqrt{x} = 7\int\sqrt{x} = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

11. a) $\int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3}\sqrt{x} = \sqrt{3}\int\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

b) $\int \frac{\sqrt{2x}}{5} = \int \frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{2}}{5}\int\sqrt{x} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2x^3}}{15}$

12. a) $\int \frac{1}{2}x^{-1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}$ **b)** $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

13. a) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}} = 3\int\frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x}$ **b)** $\int \frac{3}{\sqrt{5x}} = \frac{6}{5}\int\frac{5}{2\sqrt{5x}} = \frac{6}{5}\sqrt{5x}$

14. a) $\int \sqrt{x^3} = \int x^{3/2} = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ **b)** $\int \sqrt{7x^3} = \sqrt{7}\int\sqrt{x^3} = \frac{2}{5}\sqrt{7x^5}$

¿Recuerdas que D $(\ln x) = 1/x$?

15. a) $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$ **b)** $\int \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}\int\frac{5}{5x} = \frac{1}{5}\ln|5x|$

16. a) $\int \frac{1}{x+5} = \ln|x+5|$ **b)** $\int \frac{3}{2x+6} = \frac{3}{2}\int\frac{2}{2x+6} = \frac{3}{2}\ln|2x+6|$

Algunas funciones trigonométricas

17. a) $\int \cos x = \operatorname{sen} x$ **b)** $\int 2\cos x = 2\operatorname{sen} x$

18. a) $\int \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\int \cos 2x = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

19. a) $\int (-\operatorname{sen} x) = \cos x$ **b)** $\int \operatorname{sen} x = -\cos x$

20. a) $\int \operatorname{sen}(x-\pi) = -\cos(x-\pi)$ **b)** $\int \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen} 2x = \frac{-1}{2}\cos 2x$

21. a) $\int (1 + tg^2\, 2x) = \frac{1}{2}\int 2(1 + tg^2\, 2x) = \frac{1}{2}\, tg\, 2x$

b) $\int tg^2\, 2x = \int(1 + tg^2\, 2x - 1) = \int(1 + tg^2\, 2x) - \int 1 = \frac{1}{2}\, tg\, 2x - x$

■ **ALGUNAS EXPONENCIALES**

22. a) $\int e^x = e^x$ **b)** $\int e^{x+1} = e^{x+1}$

23. a) $\int e^{2x} = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$ **b)** $\int e^{2x+1} = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1} = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

Página 331

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4$ **b)** $\int \frac{1}{x^2}$ **c)** $\int \sqrt{x}$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}$ **e)** $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}$ **f)** $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}$

a) $\int 7x^4 = 7\frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2} = \int x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \sqrt{x} = \int x^{1/2} = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3} = \sqrt[3]{5}\,\frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} = \int \frac{x^{1/3}}{3x} + \int \frac{\sqrt{5}\,x^{3/2}}{3x} = \frac{1}{3}\int x^{-2/3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2} =$

$= \frac{1}{3}\,\frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

f) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} = \int \frac{\sqrt{5}\cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3}\cdot x^{1/3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\,\frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

2. Calcula:

a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}$ **b)** $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x + 1}$

c) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}$ **d)** $\int \frac{x^3}{x - 2}$

a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\,ln\,|x| + k$

b) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x + 1} = \int \left(x^3 - x^2 - 4x + 7 - \frac{11}{x + 1}\right) =$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x - 11\, ln\, |x + 1| + k$

c) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right) - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right) + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right) - \int \left(\frac{4}{x^2}\right) =$

$= \int 7x^2 - \int 5 + \int \frac{3}{x} - \int \frac{4}{x^2} =$

$= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\, ln\, |x| + \frac{4}{x} + K$

d) $\int \frac{x^3}{x - 2} = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x - 2}\right) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\, ln\, |x - 2| + k$

Página 332

3. a) $\int \boldsymbol{(3x - 5tg\, x)} = 3\int x - 5\int tg\, x = \frac{3x^2}{2} - 5\,(-\, ln\, |cos\, x| + k =$

$= \frac{3x^2}{2} + 5\, ln\, |cos\, x| + k$

b) $\int \boldsymbol{(5\, cos\, x + 3^x)} = 5\int cos\, x + \int 3^x = 5\, sen\, x + \frac{3^x}{ln\, 3} + k$

c) $\int \boldsymbol{(3\, tg\, x - 5\, cos\, x)} = 3\int tg\, x - 5\int cos\, x = 3\,(-\; ln|cos\, x|) - 5\, sen\, x + k =$

$= -\, 3\, ln|\mathrm{cosx}| - 5\, senx + k$

d) $\int \boldsymbol{(10^x - 5^x)} = \frac{10^x}{ln\, 10} - \frac{5^x}{ln\, 5} + k$

4. a) $\int \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x^2 + 1}} = 3\, arctg\, x + k$

b) $\int \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2 + 1}} = ln\, |x^2 + 1| + k$

c) $\int \frac{\boldsymbol{x^2 - 1}}{\boldsymbol{x^2 + 1}} = \int \left(1 + \frac{-\, 2}{x^2 + 1}\right) = x - 2\, arctg\, x + k$

d) $\int \frac{\boldsymbol{(x + 1)^2}}{\boldsymbol{x^2 + 1}} = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right) = x + ln\, |x^2 + 1| + k$

Página 335

1. Calcula:

a) $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

a) $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + k$

b) $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \frac{1}{\ln 2}\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \cdot \ln 2\, dx = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + k$

2. Calcula:

a) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\, dx$

a) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\, dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\, dx = \frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}(x^2) + k$

Página 336

3. Calcula: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\, dx$

Hacemos el cambio $x = t^6$, $dx = 6t^5\, dt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^{12}}-\sqrt{t^6}}\, 6t^5\, dt = \int \frac{6t^5}{t^4-t^3}\, dt = \int \frac{6t^2}{t-1}\, dt = 6\int \frac{t^2}{t-1}\, dt =$$

$$= 6\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = 6\left(\frac{t^2}{2}+t-\ln|t-1|\right) + k =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^2}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right) + k = 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + k$$

4. Calcula: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{1-x^2} = t \;\rightarrow\; 1-x^2 = t^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{1-t^2}$

$$dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int -1\,dt = -t + k = -\sqrt{1-x^2} + k$$

Página 336

1. Calcula: $\int x \text{ sen } x\,dx$

Llamamos $I = \int x \text{ sen } x\,dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \text{sen } x\,dx, \quad v = -\cos x \end{array}\right\} \; I = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \text{sen } x + k$$

2. Calcula: $\int x \text{ arc tg } x\,dx$

Llamamos $I = \int x \text{ arc tg } x\,dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{arc tg } x, \quad du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = x\,dx, \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}[x - \text{arc tg } x] + k = \frac{x^2}{2} \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ arc tg } x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}x + k$$

Página 337

1. Calcula: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x-4}\,dx$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx = \int \left(3x + 7 + \frac{29}{x-4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29 \ln |x-4| + k$$

2. Calcula: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x+1}\,dx$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8} \ln |2x+1| + k = \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8} \ln |2x+1| + k$$

Página 340

3. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{5x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$5x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{llllll} x=0 & \Rightarrow & -3=-A & \Rightarrow & A=3 \\ x=1 & \Rightarrow & 2=2B & \Rightarrow & B=1 \\ x=-1 & \Rightarrow & -8=2C & \Rightarrow & C=-4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx = \int\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+1}\right)dx = 3\,ln|x| + ln|x-1| - 4\,ln|x+1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$$x^2-2x+6 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \Rightarrow & 5=C \\ x=0 & \Rightarrow & 6=A-B+C \\ x=2 & \Rightarrow & 6=A+B+C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^3}\right)dx = ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$x^3 + 22x^2 - 12x + 8 = Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{llllllll} x = 0 & \Rightarrow & 8 = -4B & \Rightarrow & B = -2 & & & \\ x = 2 & \Rightarrow & 80 = 16C & \Rightarrow & C = 5 & & & \\ x = -2 & \Rightarrow & 112 = -16D & \Rightarrow & D = -7 & & & \\ x = 1 & \Rightarrow & 19 = -3A - 3B + 3C - D & \Rightarrow & -3A = -9 & \Rightarrow & A = 3 & \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x-2} - \frac{7}{x+2} \right) dx =$$

$$= 3\,ln|x| + \frac{2}{x} + 5\,ln|x-2| - 7\,ln|x+2| + k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx = ln|x+2| + k$$

Página 349

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ **c)** $\int \frac{1}{2x+7}\,dx$ **d)** $\int (x - sen\,x)\,dx$

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \int x^{-1/5}\,dx = \frac{x^{4/5}}{4/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|2x+7| + k$

d) $\displaystyle\int (x - sen\,x)\,dx = \frac{x^2}{2} + cox\,x + k$

2 **Resuelve estas integrales:**

a) $\displaystyle\int (x^2 + 4x)\,(x^2 - 1)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int (x-1)^3\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{3x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int (sen\,x + e^x)\,dx$

a) $\displaystyle\int (x^2 + 4x)\,(x^2 - 1)\,dx = \int (x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x)\,dx = \frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

b) $\displaystyle\int (x-1)^3\,dx = \frac{(x-1)^4}{4} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

d) $\displaystyle\int (sen\,x + e^x)\,dx = -cos\,x + e^x + k$

3 **S** **Calcula las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int {}^{3} \qquad dx$ **b)** $\displaystyle\int sen\,(x-4)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{7}{cos^2\,x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int (e^x + 3e^{-x})\,dx$

a) $\displaystyle\int {}^{3} \qquad dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int x^{1/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{4}\;{}^{3} \qquad + k$

b) $\displaystyle\int sen\,(x-4)\,dx = -cos\,(x-4) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{7}{cos^2\,x}\,dx = 7\,tg\,x + k$

d) $\displaystyle\int (e^x + 3e^{-x})\,dx = e^x - 3e^{-x} + k$

4 **S** **Halla estas integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx = 2\,ln\,|x| + k$

b) $\int \frac{dx}{x-1} = ln|x-1| + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\ arc\ tg\ x + k$

5 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{dx}{x-4}$ **b)** $\int \frac{dx}{(x-4)^2}$ **c)** $\int (x-4)^2 dx$ **d)** $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$

a) $\int \frac{dx}{x-4} = ln|x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)} + k$

c) $\int (x-4)^2 dx = \frac{(x-4)^3}{3} + k$

d) $\int \frac{dx}{(x-4)^3} = \int (x-4)^{-3}\, dx = \frac{(x-4)^{-2}}{-2} + k = \frac{-1}{2(x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4}\, dx$ **b)** $\int e^{-2x+9}\, dx$ **c)** $\int e^{5x}\, dx$ **d)** $\int (3^x - x^3)\, dx$

a) $\int e^{x-4}\, dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9}\, dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9}\, dx = \frac{-1}{2} e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\, dx = \frac{1}{5} e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\, dx = \frac{3^x}{ln\ 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{dx}{4+x^2}$ **b)** $\int \frac{4\,dx}{3+x^2}$ **c)** $\int \frac{5\,dx}{4x^2+1}$ **d)** $\int \frac{2\,dx}{1+9x^2}$

a) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+(x/2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\ arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + k$

b) $\int \frac{4\,dx}{3 + x^2} = \int \frac{4/3}{1 + (x/\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \frac{1/\sqrt{3}}{1 + (x/\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,arc\ tg \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + k$

c) $\int \frac{5\,dx}{4x^2 + 1} = \frac{5}{2} \int \frac{2\,dx}{(2x)^2 + 1} = \frac{5}{2}\,arc\ tg\,(2x) + k$

d) $\int \frac{2\,dx}{1 + 9x^2} = \frac{2}{3} \int \frac{3\,dx}{1 + (3x)^2} = \frac{2}{3}\,arc\ tg\,(3x) + k$

8 **Expresa las siguientes integrales de la forma:**

$$\frac{\textbf{dividendo}}{\textbf{divisor}} = \textbf{cociente} + \frac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$$

y resuélvelas:

a) $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}\,dx = \int \left(x - 6 + \frac{10}{x + 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\,ln|x + 1| + k$

b) $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x + 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\,ln|x + 1| + k$

c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}\,dx = \int \left(x^2 - x - 1 - \frac{3}{x - 2}\right) dx =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\,ln|x - 2| + k$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ **c)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$ **d)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\ x)^2}}$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x) + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{1/2\,dx}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} = arc\ sen \left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}\,dx = arc\ sen\,(e^x) + k$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\ x)^2}} = \int \frac{1/x\,dx}{\sqrt{1 - (ln\ x)^2}} = arc\ sen\,(ln|x|) + k$

10 **Resuelve las integrales siguientes, sabiendo que son de la forma** $\int f^n(x) \cdot f'(x)$:

a) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\, dx$ **b)** $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$ **c)** $\int \frac{x\, dx}{(x^2+3)^5}$ **d)** $\int \frac{1}{x} \ln^3 x\, dx$

a) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$

b) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + k$

c) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+3)^5} = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+3)^{-5}\, dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+3)^{-4}}{-4} + k = \frac{-1}{8(x^2+3)^4} + k$

d) $\int \frac{1}{x} \ln^3 x\, dx = \frac{\ln^4 |x|}{4} + k$

PARA RESOLVER

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int x^4\, e^{x^5}\, dx$ **b)** $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx$ **c)** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **d)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int x^4\, e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5} \int 5x^4\, e^{x^5}\, dx = \frac{1}{5} e^{x^5} + k$

b) $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{-1}{2} \cos x^2 + k$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{1/3\, dx}{\sqrt{1-(x/3)^2}} = \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{x}{3}\right) + k$

d) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}} = \sqrt{x^2+5} + k$

Página 350

12 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ **b)** $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^5 x}$ **c)** $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx$ **d)** $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\, dx$

a) $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{sen\ x\ dx}{cos^5\ x} = -\int (-sen\ x) \cdot cos^{-5}\ x\ dx = \frac{-cos^{-4}\ x}{-4} + k = \frac{1}{4\ cos^4\ x} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\ dx = \int (x+3)^{5/2}\ dx = \frac{(x+3)^{7/2}}{7/2} + k = \frac{2\sqrt{(x+3)^7}}{7} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{-3x}{2-6x^2}\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{-12x}{2-6x^2}\ dx = \frac{1}{4}\ ln\left|2-6x^2\right| + k$

13 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(1+ln\ x)^2}{x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{(1+cos\ x)^3}\ sen\ x\ dx$

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\ (x-1)\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\ (2x-2)\ dx = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)^{1/2}\ (2x-2)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{(x^2-2x)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{arc\ sen^2\ x}{2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{(1+ln\ x)^2}{x}\ dx = \int (1+ln\ x)^2 \cdot \frac{1}{x}\ dx = \frac{(1+ln\left|x\right|)^3}{3} + k$

d) $\displaystyle\int \sqrt{(1+cos\ x)^3}\ sen\ x\ dx = -\int (1+cos\ x)^{3/2}\ (-sen\ x)\ dx = -\frac{(1+cos\ x)^{5/2}}{5/2} + k =$

$$= \frac{-2\sqrt{(1+cos\ x)^5}}{5} + k$$

14 **S** **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int x\ ln\ x\ dx$ **b)** $\displaystyle\int e^x cos\ x\ dx$ **c)** $\displaystyle\int x^2\ sen\ x\ dx$ **d)** $\displaystyle\int x^2\ e^{2x}\ dx$

e) $\displaystyle\int cos\,(ln\ x)\,dx$ **f)** $\displaystyle\int x^2\ ln\ x\ dx$ **g)** $\displaystyle\int arc\ tg\ x\ dx$ **h)** $\displaystyle\int (x+1)^2\ e^x\ dx$

a) $\displaystyle\int x\ ln\ x\ dx$

$$\begin{cases} u = ln\ x \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \ \rightarrow\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x\ ln\ x\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\left|x\right| - \frac{x^2}{4} + k$$

b) $\int e^x \cos x\, dx$

$$\begin{cases} u = e^x & \rightarrow \quad du = e^x\, dx \\ dv = \cos x\, dx & \rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = e^x & \rightarrow \quad du_1 = e^x\, dx \\ dv_1 = \operatorname{sen} x\, dx & \rightarrow \quad v_1 = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

Por tanto:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + k$$

c) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 & \rightarrow \quad du = 2x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & \rightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x & \rightarrow \quad du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\, dx & \rightarrow \quad v_1 = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$I_1 = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + k$$

d) $\int x^2 e^{2x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 & \rightarrow \quad du = 2x\, dx \\ dv = e^{2x}\, dx & \rightarrow \quad v = \dfrac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x\,e^{2x}\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \;\;\rightarrow\;\; du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}\,dx \;\;\rightarrow\;\; v_1 = \dfrac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\,dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto: $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k$

e) $\displaystyle\int cos\,(ln\,x)\,dx$

$$\begin{cases} u = cos\,(ln\,x) \;\;\rightarrow\;\; du = -sen\,(ln\,x)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \;\;\rightarrow\;\; v = x \end{cases}$$

$$\int cos\,(ln\,x)\,dx = x\,cos\,(ln\,x) + \underbrace{\int sen\,(ln\,x)\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = sen\,(ln\,x) \;\;\rightarrow\;\; du_1 = cos\,(ln\,x)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv_1 = dx \;\;\rightarrow\;\; v_1 = x \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,(ln\,x) - \int cos\,(ln\,x)\,dx$$

Por tanto:

$$\int cos\,(ln\,x)\,dx = x\,cos\,(ln\,x) + x\,sen\,(ln\,x) - \int cos\,(ln\,x)\,dx$$

$$2\int cos\,(ln\,x)\,dx = x\,cos\,(ln\,x) + x\,sen\,(ln\,x)$$

$$\int cos\,(ln\,x)\,dx = \frac{x\,cos\,(ln\,x) + x\,sen\,(ln\,x)}{2} + k$$

f) $\displaystyle\int x^2\,ln\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,x \;\;\rightarrow\;\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \;\;\rightarrow\;\; v = \dfrac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2\,ln\,x\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

g) $\int arc\ tg\ x\ dx$

$$\begin{cases} u = arc\ tg\ x \quad \to \quad du = \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx \\ dv = dx \quad \to \quad v = x \end{cases}$$

$$\int arc\ tg\ x = x\ arc\ tg\ x - \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = x\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\ ln\ (1 + x^2) + k$$

h) $\int (x + 1)^2\, e^x\, dx$

$$\begin{cases} u = (x + 1)^2 \quad \to \quad du = 2(x + 1)\ dx \\ dv = e^x\ dx \quad \to \quad v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x + 1)^2\, e^x\, dx = (x + 1)^2\, e^x - 2\underbrace{\int (x + 1)\, e^x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x + 1) \quad \to \quad du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\ dx \quad \to \quad v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x + 1)\, e^x - \int e^x\, dx = (x + 1)\, e^x - e^x = (x + 1 - 1)\, e^x = x\, e^x$$

Por tanto:

$$\int (x + 1)^2\, e^x\, dx = (x + 1)^2\, e^x - 2x\, e^x + k =$$

$$= (x^2 + 2x + 1 - 2x)\, e^x + k = (x^2 + 1)\, e^x + k$$

15 Calcula $\int cos^4\, x\, dx$ utilizando la expresión: $cos^2\, x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{cos\ 2x}{2}$

$$cos^4\, x = \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\ 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{cos^2\ 2x}{4} + \frac{cos\ 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{cos\ 4x}{2}\right) + \frac{cos\ 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{cos\ 4x}{8} + \frac{cos\ 2x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{cos\ 4x}{8} + \frac{cos\ 2x}{2}$$

Por tanto:

$$\int cos^4\, x\, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{cos\ 4x}{8} + \frac{cos\ 2x}{2}\right) dx = \frac{3}{8}\, x + \frac{sen\ 4x}{32} + \frac{sen\ 2x}{2} + k$$

16 **Determina el valor de las integrales propuestas en los ejercicios siguientes utilizando la fórmula de integración por partes:**

a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int 3x \cos x\,dx$ **d)** $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \ \rightarrow \ du = 2x\,dx \\ dv = e^{3x}\,dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\underbrace{\int x e^{3x}\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \ \rightarrow \ du_1 = dx \\ dv_1 = e^{3x}\,dx \ \rightarrow \ v_1 = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2x}{9}e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + k = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int x e^{-x}\,dx$

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow \ du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \ \rightarrow \ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x} + k = \frac{-x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + k = \frac{-x-1}{e^x} + k$$

c) $\displaystyle\int 3x \cos x\,dx$

$$\begin{cases} u = 3x \ \rightarrow \ du = 3\,dx \\ dv = \cos x\,dx \ \rightarrow \ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\int 3x\cos x\,dx = 3x \operatorname{sen} x - 3\int \operatorname{sen} x\,dx = 3x\operatorname{sen} x + 3\cos x + k$$

d) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \ \rightarrow \ du = 3x^2\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \ \rightarrow \ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^3 \, sen \, x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \underbrace{\int x^2 \cos x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 & \rightarrow & du_1 = 2x \, dx \\ dv_1 = \cos x \, dx & \rightarrow & v_1 = sen \, x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2 \, sen \, x - 2 \underbrace{\int x \, sen \, x \, dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x & \rightarrow & du_2 = dx \\ dv_2 = sen \, x \, dx & \rightarrow & v_2 = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + sen \, x$$

Así: $I_1 = x^2 \, sen \, x + 2x \cos x - 2 \, sen \, x$

Por tanto:

$$\int x^3 \, sen \, x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \, sen \, x + 6x \cos x - 6 \, sen \, x + k$$

17 **Determina el valor de las integrales que se proponen a continuación:**

a) $\int x \cdot 2^{-x} \, dx$ **b)** $\int arc \cos x \, dx$ **c)** $\int x \cos 3x \, dx$ **d)** $\int x^5 e^{-x^3} \, dx$

a) $\int x \cdot 2^{-x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = 2^{-x} \, dx & \rightarrow & v = \dfrac{-2^{-x}}{\ln 2} \end{cases}$$

$$\int x \, 2^{-x} \, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \int \frac{2^{-x}}{\ln 2} \, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} \, dx =$$

$$= \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + k$$

b) $\int arc \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = arc \cos x & \rightarrow & du = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ dv = dx & \rightarrow & v = x \end{cases}$$

$$\int arc \cos x \, dx = x \, arc \cos x - \int \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = x \, arc \cos x - \sqrt{1 - x^2} + k$$

c) $\int x \cos 3x \, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos 3x \, dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \end{cases}$$

$$\int x \cos 3x \, dx = \frac{x}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} 3x \, dx = \frac{x}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + k$$

d) $\int x^5 e^{-x^3} dx = \int \underbrace{x^3}_{u} \cdot \underbrace{x^2 e^{-x^3} dx}_{dv}$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\rightarrow\; du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k =$$

$$= \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

18 **En el ejercicio resuelto 7 a), se ha calculado la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ aplicando la igualdad:**

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Vamos a obtenerla, ahora, mediante la integración por partes, haciendo:

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \;\rightarrow\; du = \cos x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \;\rightarrow\; v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

Si con esta nueva integral procedemos como con la anterior, llegaríamos a una identidad inútil ("se nos va todo"). Compruébalo.

Sin embargo, si hacemos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se resuelve con facilidad. Termina la integral.

- Si aplicáramos el método de integración por partes a la integral $\int \cos^2 x \, dx$, tendríamos que:

$$\begin{cases} u = \cos x \;\rightarrow\; du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \;\rightarrow\; v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Por tanto, quedaría: $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

En efecto, es una identidad inútil ("se nos va todo").

• Sin embargo, si hacemos $cos^2\, x = 1 - sen^2\, x$, tenemos que:

$$\int sen^2\, x\, dx = -sen\, x\, cos\, x + \int (1 - sen^2\, x)\, dx =$$

$$= -sen\, x\, cos\, x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx = -sen\, x\, cos\, x + x - \int sen^2\, x\, dx$$

Por tanto:

$$2\int sen^2\, x\, dx = -sen\, x\, cos\, x + x$$

$$\int sen^2\, x\, dx = \frac{-sen\, x\, cos\, x + x}{2} + k = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\, sen\, 2x + k$$

19 **Determina el valor de las integrales racionales propuestas en los siguientes ejercicios:**

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\, dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{2}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\, ln\, (x^2+1) + 2\, arc\, tg\, x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx = \frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A, B, C y D, dando a x los valores 1, –1, 0 y 2:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \;\to\; 1 = 4B \;\to\; B = 1/4 \\ x = -1 \;\to\; 1 = 4D \;\to\; C = 1/4 \\ x = 0 \;\to\; 1 = -A + B + C + D \;\to\; 1/2 = -A + C \\ x = 2 \;\to\; 1 = 9A + 9B + 3C + D \;\to\; -3/2 = 9A + 3C \;\to\; -1/2 = 3A + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)}\, dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\, dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\, ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\, ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right] + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}\right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+1^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2+7x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 1 & \to \ 8 = 4A & \to & A = 2 \\ x = -1 & \to \ -6 = -2C & \to & C = 3 \\ x = 0 & \to \ -1 = A - B - C & \to & B = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 2\,ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2x^2+5x-1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \to \ -1 = -2A & \to & A = 1/2 \\ x = 1 & \to \ 6 = 3B & \to & B = 2 \\ x = -2 & \to \ -3 = 6C & \to & C = -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \frac{1/2}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln|x| + 2\,ln|x-1| - \frac{1}{2}\,ln|x+2| + k = ln\left(\frac{(x-1)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}\right) + k$$

20 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\,(x+3)^2}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+3)}$$

$$2x - 4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 1 & \rightarrow & -2 = 4B & \rightarrow\ B = -1/2 \\ x = -3 & \rightarrow & -10 = 16C & \rightarrow\ C = -5/8 \\ x = 0 & \rightarrow & -4 = -3A + 3B + C & \rightarrow\ A = 5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{2x-2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)\,(x+5)}$$

$$2x + 3 = A(x+5) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 2 & \rightarrow & 7 = 7A & \rightarrow & A = 1 \\ x = -5 & \rightarrow & -7 = -7B & \rightarrow & B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + ln|x+5| + k = ln|(x-2)(x+5)| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 1 & \rightarrow & 1 = 16A & \rightarrow & A = 1/16 \\ x = -3 & \rightarrow & 1 = -4C & \rightarrow & C = -1/4 \\ x = 0 & \rightarrow & 1 = 9A - 3B - C & \rightarrow & B = -1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln|x-1| - \frac{1}{16}\,ln|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$3x - 2 = A(x+2) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 2 & \to\ 4 = 4A & \to & A = 1 \\ x = -2 & \to\ -8 = -4B & \to & B = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + 2\,ln|x+2| + k = ln\left[|x-2|(x+2)^2\right] + k$$

Página 351

21 **S** **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-2}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x+1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x = -1 & \to\ 1 = -3A & \to & A = -1/3 \\ x = 2 & \to\ 1 = 3B & \to & B = 1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{1/3}{x-2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{3}\,ln|x+1| + \frac{1}{3}\,ln|x-2| + k = \frac{1}{3}\,ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \left(x-1+\frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)}\right)dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$3x^2-6 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llllll} x=0 & \to & -6=-2A & \to & A=3 \\ x=1 & \to & -3=3B & \to & B=-1 \\ x=-2 & \to & 6=6C & \to & C=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(x-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-x+3\,ln|x|-ln|x-1|+ln|x+2|+k =$$

$$= \frac{x^2}{2}-x+ln\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right|+k$$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

$$5x^2 = A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 & \to & 5=C \\ x=2 & \to & 20=A+B+C \\ x=0 & \to & 0=A-B+C \end{array}\right\}\begin{array}{l} A=5 \\ B=10 \\ C=5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int\left(\frac{5}{x-1}+\frac{10}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}\right)dx =$$

$$= 5\,ln|x-1|-\frac{10}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)^2}+k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A(x-3)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$2x-3 = A(x-3)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x-3)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llllll} x=2 & \to & 1=-5A & \to & A=-1/5 \\ x=3 & \to & 3=6B & \to & B=1/2 \\ x=-3 & \to & -9=30C & \to & C=-3/10 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx = \int \left(\frac{-1/5}{x-2} + \frac{1/2}{x-3} + \frac{-3/10}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{-1}{5}\,ln|x-2| + \frac{1}{2}\,ln|x-3| - \frac{3}{10}\,ln|x+3| + k$$

22 **Resuelve las integrales:**

a) $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx$ **e)** $\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$ **f)** $\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx$

g) $\int \frac{arc\,tg\,x}{1+x^2}\,dx$ **h)** $\int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\,dx$

a) $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,ln\,x\,dx = \frac{ln^2|x|}{2} + k$

b) $\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx = ln|x+cos\,x| + k$

c) $\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx = \int \frac{1/x}{ln\,x}\,dx = ln\big|\,ln|x|\,\big| + k$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx = ln|e^x+x| + k$

e) $\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right)dx = cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

f) $\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx = \int \left(2 - \frac{7}{x+2}\right)dx = 2x - 7\,ln|x+2| + k$

g) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\ arc\ tg\ x\,dx = \frac{arc\ tg^2\ x}{2} + k$

h) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4\ x}\,dx = -\int (-sen\ x)(cos\ x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\ x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3\ cos^3\ x} + k$

23 **Calcula las integrales indefinidas:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int ln\,(x^2+1)\,dx$ **e)** $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$ **f)** $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(-sen\ \sqrt{x})\,dx = -2\ cos\,(\sqrt{x}) + k$

b) $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x-3) \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x-3}\,dx \\ dv = dx \ \rightarrow\ v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x-3)\,dx = x\,ln|x-3| - \int \frac{x}{x-3}\,dx = x\,ln|x-3| - \int 1 + \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= x\,ln|x-3| - x - 3\ ln|x-3| + k = (x-3)\ ln|x-3| - x + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\ \sqrt{x} \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}\,dx \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ \rightarrow\ dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{ln\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ ln\ \sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\,dx = 2\sqrt{x}\ ln\ \sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ ln\ \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}\,(ln\ \sqrt{x} - 1) + k$$

d) $\displaystyle\int ln\,(x^2 + 1)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x^2 + 1) & \rightarrow \quad du = \dfrac{2x}{x^2 + 1}\,dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x^2 + 1)\,dx = x\,ln\,(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= x\,ln\,(x^2 + 1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx = x\,ln\,(x^2 + 1) - 2x + 2\,arc\,tg\,x + k$$

e) $\displaystyle\int (ln\,x)^2\,dx$

$$\begin{cases} u = (ln\,x)^2 & \rightarrow \quad du = 2\,(ln\,x) \cdot \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

$$\int (ln\,x)^2\,dx = x\,(ln\,x)^2 - 2\int ln\,x\,dx = x\,ln^2|x| - 2\,x\,ln|x| + 2x + k$$

f) $\displaystyle\int e^x\,cos\,e^x\,dx = sen\,e^x + k$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - x^2}\,dx = \int \frac{-1}{(x + 1)(x - 1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = -1 & \rightarrow & -1 = -2A & \rightarrow & A = 1/2 \\ x = 1 & \rightarrow & -1 = 2B & \rightarrow & B = -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x + 1} + \frac{-1/2}{x - 1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln|x + 1| + \frac{1}{2}\,ln|x - 1| + k = ln \qquad\qquad + k$$

h) $\displaystyle\int \frac{(1 - x)^2}{1 + x}\,dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}\,dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x + 1}\right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 4\,ln|x + 1| + k$$

24 **S** **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx$

En el numerador, suma y resta e^x.

b) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx$

Descomponla en suma de otras dos.

a) $$\int \frac{1}{1 + e^x}\,dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x}\,dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) = x - ln\,(1 + e^x) + k$$

b) $$\int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = -\int \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{9 - x^2} + 3\int \frac{1/3}{\sqrt{1 - (x/3)^2}}\,dx = -\sqrt{9 - x^2} + 3\ arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

25 **Resuelve por sustitución:**

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x + 1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x}\,dx$

a) Haz $x + 1 = t^2$. b) Haz $x = t^4$.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x + 1}\,dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \ \rightarrow\ dx = 2t\,dt$

$$\int x\sqrt{x + 1}\,dx = \int (t^2 - 1)\,t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x + 1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x + 1)^3}}{3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \ \rightarrow\ dx = 4t^3\,dt$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\,dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\,ln\,|t^3 - 1| + k =$$

$$= \frac{4}{3}\,ln\,|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \quad \to \quad dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{(t^2 - 1)}{t} \cdot 2t\, dt = \int (2t^2 - 2)\, dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\quad}\, dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \quad \to \quad dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{1}{\quad}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{(t^2 - 1)\, t} = \int \frac{2\, dt}{(t+1)(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$2 = A(t-1) + B(t+1)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} t = -1 & \to \quad 2 = -2A & \to \quad A = -1 \\ t = 1 & \to \quad 2 = 2B & \to \quad B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\, dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -ln\,|t+1| + ln\,|t-1| + k =$$

$$= ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{\quad}\, dx = ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\quad} \right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx$

Cambio: $x = t^2 \quad \to \quad dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{t^2 + t} = \int \frac{2\, dt}{t+1} = 2\, ln\,|t+1| + k =$$

$$= 2\, ln\,(\sqrt{x} + 1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\,arc\;tg\;t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\;tg\;\sqrt{x} + k$$

26 **Resuelve, utilizando un cambio de variable, estas integrales:**

a) $\displaystyle\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) Haz $sen\;t = 2x/3$.

a) $\displaystyle\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$

Cambio: $sen\;t = \dfrac{2x}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{3}{2}\,sen\;t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{3}{2}\cos t\,dt$

$$\int \sqrt{9-4x^2}\,dx = \int \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{9}{4}\,sen^2\,t} \cdot \frac{3}{2}\cos t\,dt = \int 3\cos t \cdot \frac{3}{2}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\,sen\;2t\right) + k =$$

$$= \frac{9}{4}t + \frac{9}{8}\,sen\;2t + k = \frac{9}{4}\,arc\;sen\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{9}{8} \cdot 2\,sen\;t\cos t + k =$$

$$= \frac{9}{4}\,arc\;sen\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{2x}{3}\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}} + k =$$

$$= \frac{9}{4}\,arc\;sen\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{9-4x^2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = \ln t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\,dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3) + B(t-3) + Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t = 0 & \to \quad 1 = -3B & \to & B = -1/3 \\ t = 3 & \to \quad 1 = 9C & \to & C = 1/9 \\ t = 1 & \to \quad 1 = -2A - 2B + C & \to & A = -1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3} \right) dt =$$

$$= \frac{-1}{9}\,ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\,ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \frac{-1}{9}\,ln\, e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln|e^x - 3| + k =$$

$$= -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln|e^x - 3| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\,dx$

Cambio: $e^x = t \;\to\; x = ln\, t \;\to\; dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= t - 2\,arc\,tg\,t + k = e^x - 2\,arc\,tg\,(e^x) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \;\to\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1 + t} = \int \left(2 - \frac{2}{1 + t}\right) dt = 2t - 2\,ln|1 + t| + k =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\,ln\,(1 + \sqrt{x}) + k$$

27 S **Encuentra la primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x}$ que se anula para $x = 0$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{1 + 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1 + 3x}\,dx = \frac{1}{3}\,ln|1 + 3x| + k$$

$$F(0) = k = 0$$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{-1}{3}\,ln|1 + 3x|$

28 **Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x} + k$$

$$F(1) = -1 + k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

Por tanto: $F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

29 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$$F(x) = \int (4x - 6)\, dx = 2x^2 - 6x + k$$

$$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 8$$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

30 **Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ y $f(2) = 5$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \int 6x\, dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x + k \\ \end{array}\right\}$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

31 **Resuelve las siguientes integrales por sustitución:**

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 - \sqrt{e^x}}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

a) Haz $\sqrt{e^x} = t$. b) Haz $\sqrt{e^x - 1} = t$.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 - \sqrt{e^x}}\, dx$

Cambio: $\sqrt{e^x} = t \;\rightarrow\; e^{x/2} = t \;\rightarrow\; \frac{x}{2} = \ln t \;\rightarrow\; dx = \frac{2}{t}\, dt$

$$\int \frac{e^x}{1 - \sqrt{e^x}} = \int \frac{t^2 \cdot (2/t)\, dt}{1 - t} = \int \frac{2t\, dt}{1 - t} = \int \left(-2 + \frac{2}{1 - t}\right) dt =$$

$$= -2t - 2 \ln|1 - t| + k = -2\sqrt{e^x} - 2 \ln|1 - \sqrt{e^x}| + k$$

b) $\int \sqrt{e^x - 1}\ dx$

Cambio: $\sqrt{e^x - 1} = t \ \rightarrow \ e^x = t^2 + 1 \ \rightarrow \ x = ln\,(t^2 + 1) \ \rightarrow \ dx = \dfrac{2t}{t^2 + 1}\,dt$

$$\int \sqrt{e^x - 1}\ dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2 + 1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\ arc\ tg\ t + k = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\ arc\ tg\ \sqrt{e^x - 1} + k$$

32 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{sen^2\,x}{1 + cos\,x}\,dx.$

☛ ***Multiplica numerador y denominador por*** $1 - cos\,x.$

$$\int \frac{sen^2\,x}{1 + cos\,x}\,dx = \int \frac{sen^2\,x\,(1 - cos\,x)}{(1 + cos\,x)(1 - cos\,x)}\,dx = \int \frac{sen^2\,x\,(1 - cos\,x)}{1 - cos^2\,x}\,dx =$$

$$= \int \frac{sen^2\,x\,(1 - cos\,x)}{sen^2\,x}\,dx = \int (1 - cos\,x)\,dx = x - sen\,x + k$$

Página 352

33 **Encuentra una primitiva de la función:**
S

$$f(x) = x^2\ sen\ x$$

cuyo valor para $x = \pi$ **sea 4.**

$$F(x) = \int x^2\ sen\ x\ dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \ \rightarrow \ du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \ \rightarrow \ v = -cos\,x \end{cases}$$

$$F(x) = -x^2\,cos\,x + 2\underbrace{\int x\,cos\,x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \ \rightarrow \ du_1 = dx \\ dv_1 = cos\,x\,dx \ \rightarrow \ v_1 = sen\,x \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + cos\,x$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = -x^2\,cos\,x + 2\ x\,sen\,x + 2\,cos\,x + k \\ F(\pi) = \pi^2 - 2 + k = 4 \ \Rightarrow \ k = 6 - \pi^2 \end{array}\right\}$$

$$F(x) = -x^2\,cos\,x + 2\ x\,sen\,x + 2\,cos\,x + 6 - \pi^2$$

34 **S** **Determina la función $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = x \ln x, \; f'(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(e) = \frac{e}{4}$$

$$f'(x) = \int x \ln x \, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} & f'(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + k \\ & f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \int \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) dx}_{I} + \frac{1}{4}x$$

$$\begin{cases} u = \left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{x^2}{2}\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^3}{6} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{6}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\,dx = \frac{x^3}{6}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \frac{x^3}{6}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x + k \\ & f(e) = \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \;\Rightarrow\; k = -\frac{e^3}{36} \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$$

35 **S** **Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que $f'(x) = x\, e^{-x^2}$ y que $f(0) = \frac{1}{2}$.**

$$f(x) = \int x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int -2x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + k$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad k = 1$$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + 1$

36 **S** **Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y**

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$$f(1) = -1 \quad\Rightarrow\quad e - 1 + c = -1 \quad\Rightarrow\quad c = -e$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

37 **S** **De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \neq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$.

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} \; c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ ln\, x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(2) = ln\, 2$; $\quad f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = ln\, 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

38 **S** **Calcula:**

a) $\int |1 - x|\, dx$ **b)** $\int (3 + |x|)\, dx$ **c)** $\int |2x - 1|\, dx$ **d)** $\int \left|\dfrac{x}{2} - 2\right| dx$

a) $\int |1 - x|\, dx$

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ -1 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1 - x|\, dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\[2ex] -x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} + k \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2} + c \end{array}\right\} \; \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1 - x|\, dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\[2ex] -x + \dfrac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|)\,dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|)\,dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(x)$ ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|)\,dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1|\,dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1|\,dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} + c \end{array}\right\} \dfrac{1}{4} + k = -\dfrac{1}{4} + c \Rightarrow c = \dfrac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1|\,dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + k & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\displaystyle\int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx$

$$\left| \frac{x}{2} - 2 \right| = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + 2 & \text{si } \; x < 4 \\ \dfrac{x}{2} - 2 & \text{si } \; x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } \; x < 4 \\ \dfrac{x^2}{4} - 2x + c & \text{si } \; x \geq 4 \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = 4$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4 + k \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -4 + c \end{array} \right\} \; 4 + k = -4 + c \;\; \Rightarrow \;\; c = 8 + k$$

Por tanto:

$$\int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } \; x < 4 \\ \dfrac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } \; x \geq 4 \end{cases}$$

39 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2\, x \cos^2 x}\, dx.$

$$\int \frac{1}{sen^2\, x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{sen^2\, x + \cos^2 x}{sen^2\, x \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{sen^2\, x}{sen^2\, x \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2\, x \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{sen^2\, x}\, dx = tg\, x - cotg\, x + k$$

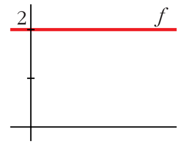
CUESTIONES TEÓRICAS

40 **S** **Prueba que, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.**

$F(x)$ primitiva de $f(x) \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x)$

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) = f(x) \;\; \Rightarrow \;\; F(x) + C \text{ es primitiva de } f(x).$$

41 **Representa tres primitivas de la función f cuya gráfica es esta:**



$$f(x) = 2 \;\Rightarrow\; F(x) = 2x + k$$

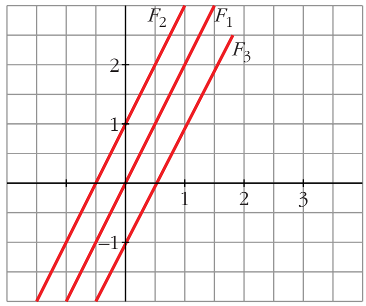
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

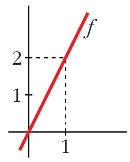
$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



42 **Representa tres primitivas de la función f:**



$$f(x) = 2x \;\Rightarrow\; F(x) = x^2 + k$$

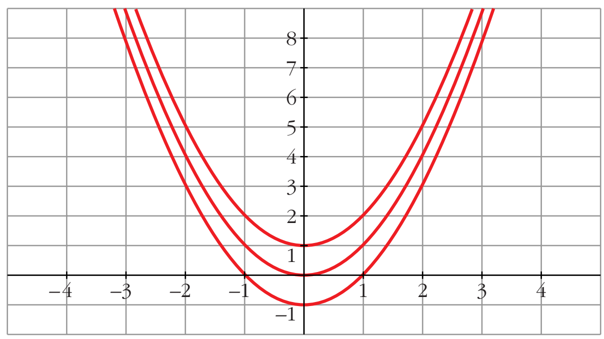
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



43 **Sabes que una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es $F(x) = ln\,|x|$. ¿Por qué se toma el valor absoluto de x?**

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida para todo $x \neq 0$; y es la derivada de la función:

$$F(x) = \begin{cases} ln\,x & \text{si } x > 0 \\ ln\,(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir, de $F(x) = ln\,|x|$.

44 **En una integral hacemos el cambio de variable $e^x = t$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?**

$$e^x = t \;\rightarrow\; x = ln\,t \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{t}\,dt$$

45 **Comprueba que:** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$ es $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Derivamos $f(x) = \ln\left|\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{1 + \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

46 **Comprueba que:** $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = \ln|\operatorname{tg} x| + k$

Tenemos que comprobar que la derivada de la función $f(x) = \ln|\operatorname{tg} x| + k$ es $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

Derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1/\cos^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1/\cos^2 x}{\operatorname{sen} x/\cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

47 **Sin utilizar cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^4} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{-x^4}{1 + x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1 + x^4} - \left(\frac{-x^4}{1 + x^4}\right) = \frac{1 + x^4}{1 + x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

48 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?**

No. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \quad\to\quad F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \quad\to\quad G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$ respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

Página 353

PARA PROFUNDIZAR

49 Para integrar una función cuyo denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales, distinguiremos dos casos:

a) Si el numerador es constante, transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado. La solución será un arco tangente:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1}$$

(Completa la resolución).

b) Si el numerador es de primer grado, se descompone en un logaritmo neperiano y un arco tangente:

$$\int \frac{(x + 5)\,dx}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 10}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2 + 2x + 3}$$

(Completa su resolución).

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = arc\ tg(x + 2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{(x + 5)\,dx}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 10}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2 + 2x + 3} =$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 4\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 2\int \frac{dx}{\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2}\int \frac{(1/\sqrt{2})\,dx}{\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2}\ arc\ tg\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

50 **Observa cómo se resuelve esta integral:**

$$I = \int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\, dx$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x = x(x^2 + 2x + 3)$$

La fracción se descompone así: $\dfrac{x+1}{x^3+2x^2+3x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

Obtenemos: $A = \dfrac{1}{3},\ B = -\dfrac{1}{3},\ C = \dfrac{1}{3}$

Sustituimos: $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\, dx$

(Completa su resolución).

Completamos la resolución:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{3} ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+3} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{3} ln|x| - \frac{1}{6} ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\, arc\ tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

(*) $\left(\text{Ver en el ejercicio 49 apartado b) el cálculo de } \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+3}\right)$.

51 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+x}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+10}{x^2+x+1}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+3x+4}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

e) Multiplica numerador y denominador por 4.

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+x}\, dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\, dx$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}$$

$$2x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \to & -1 = A & \\ x = 1 & \to & 1 = 2A + B + C & \to \quad 3 = B + C \\ x = -1 & \to & -3 = 2A + B - C & \to \quad -1 = B - C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}\,ln(x^2+1) + 2\,arc\,tg\,x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-x+1) + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + Bx(x+1) + C(x+1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = -1 & \to & 1 = 3A & \to & A = 1/3 \\ x = 0 & \to & 1 = A + C & \to & C = 2/3 \\ x = 1 & \to & 1 = A + 2B + 2C & \to & B = -1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{-1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x + 1| - \frac{1}{6} ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x + 1| - \frac{1}{6} ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{4/3}{\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x + 1| - \frac{1}{6} ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} ln|x + 1| - \frac{1}{6} ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ arc tg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

c) $$\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9} dx = \int \left(1 + \frac{3x - 1}{x^2 + 9}\right) dx = x + \int \frac{3x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 9} =$$

$$= x + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{1/9}{(x/3)^2 + 1} dx =$$

$$= x + \frac{3}{2} ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \text{ arc tg} \left(\frac{x}{3}\right) + k$$

d) $$\int \frac{2x + 10}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1 + 9}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + 9 \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= ln(x^2 + x + 1) + 9 \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= ln(x^2 + x + 1) + 6\sqrt{3} \int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= ln(x^2 + x + 1) + 6\sqrt{3} \text{ arc tg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

e) $$\int \frac{2}{x^2 + 3x + 4} dx = \int \frac{8}{4x^2 + 12x + 16} dx = \int \frac{8}{(2x + 3)^2 + 7} dx =$$

$$= \int \frac{8/7}{\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx = \frac{8}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \int \frac{2/\sqrt{7}}{\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{7} \text{ arc tg} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{7}}\right) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x+1)^2 + D(x+1)^2$$

Hallamos A, B, C y D:

$$\left.\begin{array}{lll} x=-1 & \rightarrow & 1 = 2B \;\rightarrow\; B = 1/2 \\ x=0 & \rightarrow & 1 = A+B+D \\ x=1 & \rightarrow & 1 = 4A+2B+4C+4D \\ x=-2 & \rightarrow & 1 = -5A+5B-2C+D \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \\ C = -1/2 \\ D = 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \int\left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\,ln(x^2+1) + k$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

52 **Se llama ecuación diferencial de primer orden a una ecuación en la que, además de las variables x e y, figura también y'. Resolver una ecuación diferencial es buscar una función $y = f(x)$ que verifique la ecuación propuesta.**

Por ejemplo, la ecuación $x\,y^2 + y' = 0$ se resuelve así:

$$y' = -x\,y^2 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -x\,y^2 \;\rightarrow\; dy = -x\,y^2\,dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\,dx \;\rightarrow\; \int\frac{dy}{y^2} = \int(-x)\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \;\rightarrow\; y = \frac{2}{x^2-2k}$$

Hay infinitas soluciones.

Busca la solución que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto $(0, 2)$:

$$y = \frac{2}{x^2-2k} \;\rightarrow\; 2 = \frac{2}{-2k} \;\Rightarrow\; -4k = 2 \;\Rightarrow\; k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto: $y = \dfrac{2}{x^2+1}$

• Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

53 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{y\,y' - x = 0}$ **b)** $\boldsymbol{y^2\,y' - x^2 = 1}$ **c)** $\boldsymbol{y' - x\,y = 0}$

d) $\boldsymbol{y'\sqrt{x} - y = 0}$ **e)** $\boldsymbol{y'\,e^y + 1 = e^x}$ **f)** $\boldsymbol{x^2\,y' + y^2 + 1 = 0}$

a) $yy' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y^2 = x^2 + 2k$$

b) $y^2\,y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1+x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{y^2} \Rightarrow y^2\,dy = (1+x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1+x^2)\,dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = 3x + x^3 + 3k \Rightarrow y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - x\,y = 0$

$$y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow |y| = e^{(x^2/2)+k}$$

d) $y'\sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \Rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x}+k}$$

e) $y'\,e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \Rightarrow \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \Rightarrow y = ln(e^x - x + k)$$

f) $x^2\, y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\, dx \;\Rightarrow\; arc\ tg\ y = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

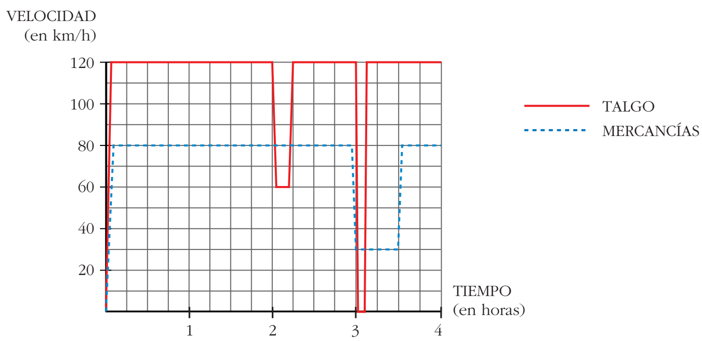
13 LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

Página 354

Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Éstas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad: ¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

  d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (Es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el Talgo, pero sí *donde* el Talgo.) Más adelante el Talgo para en una estación.

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o negra. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

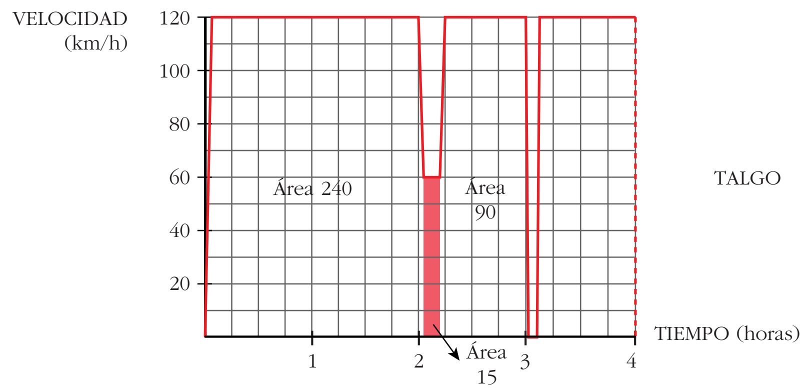
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

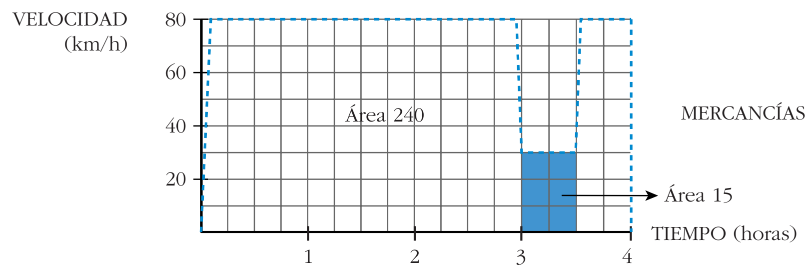
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f)

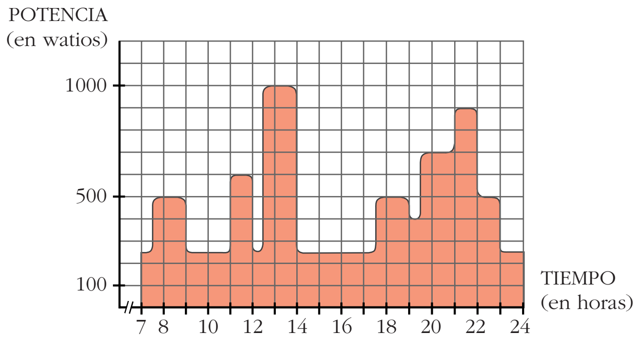




Página 355

Consumo de energía eléctrica

La gráfica nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida: potencia × tiempo = energía.

Un cuadrito equivale a 0,1 kW h

■ **¿Cuántos kW h se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?**

Hay 81,25 cuadritos, luego se han consumido:

$$0{,}1 \cdot 81{,}25 = 8{,}125 \text{ kW h}$$

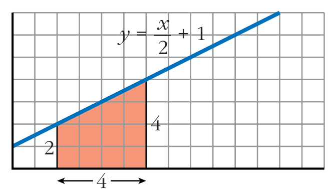
Página 359

1. Halla gráficamente las siguientes integrales:

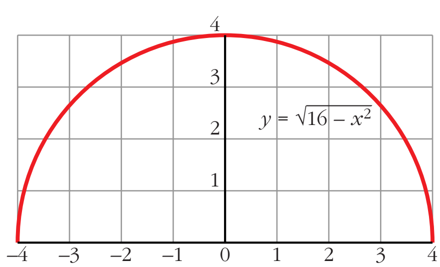
a) $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx$

a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.

$$\text{Área} = \frac{2+4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b) $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (Circunferencia)



El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$

2. **Halla gráficamente las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}+4\right)dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(4-\sqrt{16-x^2}\right)dx$

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}+4\right)dx = \int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx + \int_{-4}^{4}4\,dx$

Llamamos $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{-4}^{4}4\,dx$.

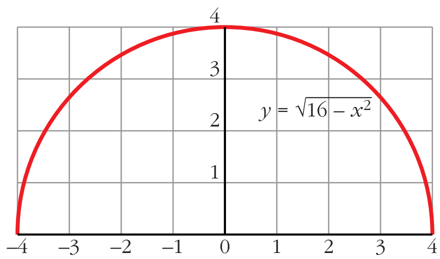
Resolvemos gráficamente ambas integrales para posteriormente sumar los resultados.

I_1: $y = \sqrt{16-x^2} \Rightarrow y^2 = 16-x^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4^2$ (circunferencia)

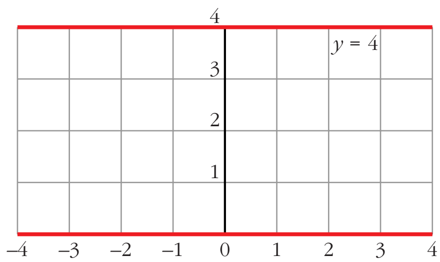
El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2}\cdot\pi = 8\cdot\pi = 25{,}1\ \text{u}^2$$



I_2: Se trata de un rectángulo de dimensiones 8 u × 4 u. Por tanto, su área es 32 u^2.



Finalmente, $I_1 + I_2 = 25{,}1 + 32 = 57{,}1$ u^2.

b) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(4-\sqrt{16-x^2}\right)dx = \int_{-4}^{4}4\,dx - \int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Observamos que se trata de las mismas integrales que en el apartado a), solo que ahora es $I_2 - I_1$, dando como resultado $32 - 25{,}1 = 6{,}9$ u^2.

Página 363

1. **Sea la función:** $\boldsymbol{F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2+4)\,dt}$**. Calcula** $\boldsymbol{F'(x)}$**.**

$F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2+4)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$, siendo $f(t) = log(t^2+4)$ continua.

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2+4)$$

2. **Calcula la siguiente integral:** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

Página 364

1. **Calcula:** $\displaystyle\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\,dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5}\cdot 6^5 - 3\cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^5 - 3\cdot 1\right) =$$

$$= -4942{,}8 + 2{,}8 = -4940$$

2. **Calcula:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$I = [\operatorname{arc\,tg} x]_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación: $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{4a}$

Página 366

1. **Halla el área comprendida entre la función** $y = x^3 - x^2 - 6x$ **y el eje** X**.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son -2, 0 y 3.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

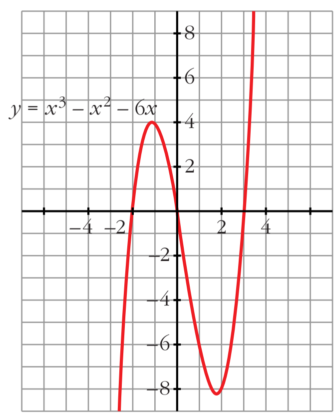
III. $G(-2) = \dfrac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \dfrac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \dfrac{-63}{4}$

El área buscada es: $\dfrac{16}{3} + \left|\dfrac{-63}{4}\right| = \dfrac{253}{12}$ u^2

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2. Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$.

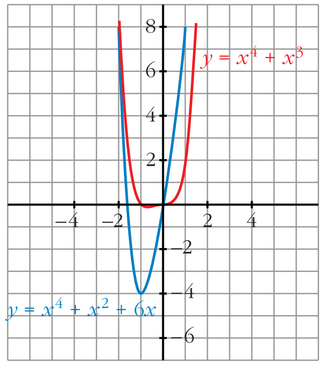
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje X, lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es $\frac{253}{12}$ u^2.

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



Página 367

1. Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje X. ¿Qué límites de integración debes tomar?

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (25 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \pi \cdot \frac{500}{3} \text{ u}^3$$

Observación: El volumen del cuerpo engendrado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, al girar alrededor del eje X es:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \text{ u}^3$$

Página 373

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Calcula el área comprendida entre la curva: $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

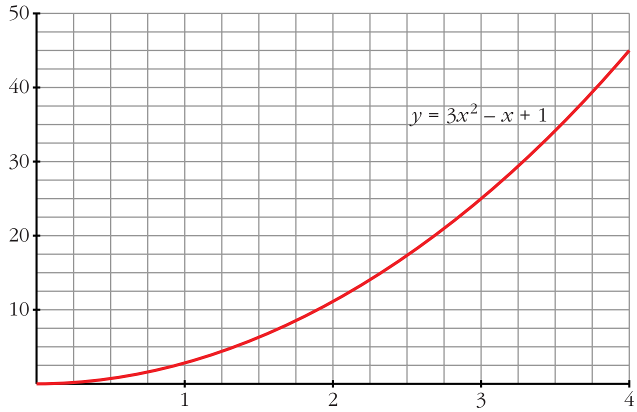
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\, dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.

(La gráfica la hemos incluido para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 1$.**

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $\frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

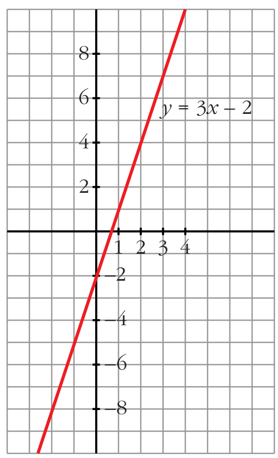
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$, $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$, $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su area).



3 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

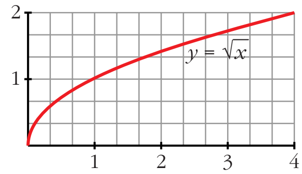
$$G(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es: $\frac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



4 **Halla el área comprendida entre $y = x^2 - 5$ e $y = -x^2 + 5$.**

I. Buscamos las soluciones de: $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Buscamos su primitiva:

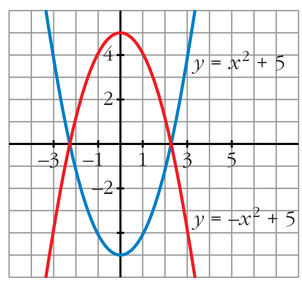
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}$, $G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

V. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\frac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



5 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son -2 y 2.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

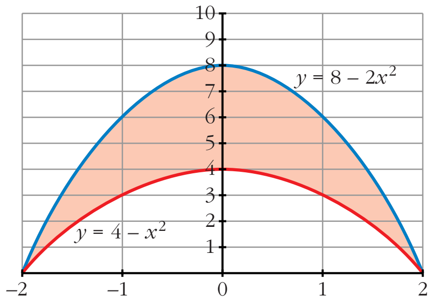
$$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \dfrac{8}{3} = -\dfrac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \dfrac{16}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$

III. Calculamos su primitiva:

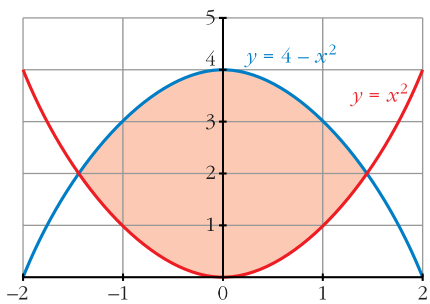
$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).



c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

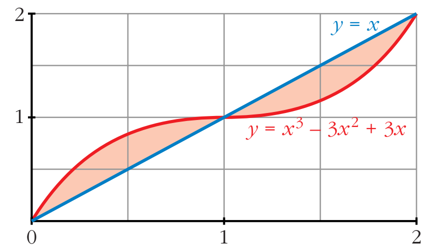
IV. $G(0) = 0, \quad G(1) = \dfrac{1}{4}, \quad G(2) = 0$

$G(1) - G(0) = \dfrac{1}{4}$

$G(2) - G(1) = \dfrac{-1}{4}$

El área buscada es: $\dfrac{1}{4} + \left|\dfrac{-1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x \cdot (x-1) \cdot (x-2)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\dfrac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son -1 y 1.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = x^2 - 1$

III. Calculamos su primitiva:

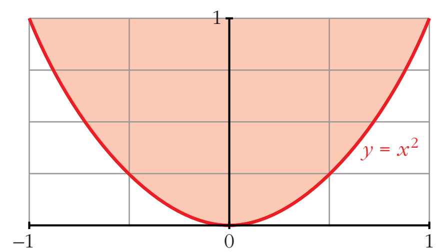
$$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{2}{3}, \quad G(1) = \dfrac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \dfrac{-2}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son 0 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

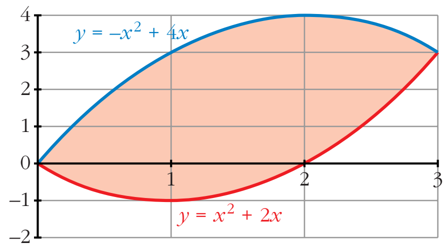
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$. Son -1 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculamos su primitiva:

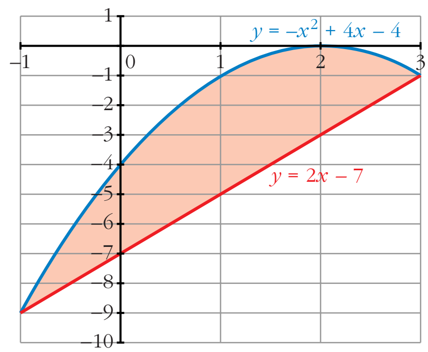
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

V. $G(3) - G(-1) = 9 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



6 **S** **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x-1)^2 (x+1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $(x-1)^2 \cdot (x+1) = 0$. Son -1 y 1.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que hay entre ellos: 1, 2.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

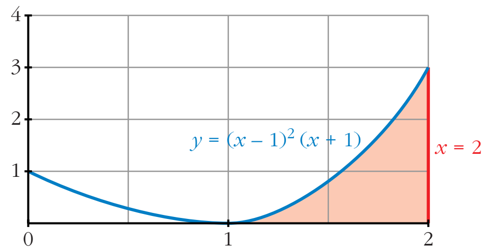
$$G(x) = \int (x-1)^2 \cdot (x+1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \frac{5}{12}$, $G(2) = \frac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$

El área buscada es $\frac{11}{12}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



7 **Halla el área limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x = x^4$. Son 0 y 1.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - \sqrt{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

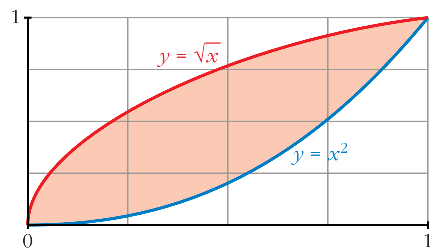
$$G(x) = \int (x^2 - \sqrt{x})\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \frac{-1}{3}$

V. $G(1) - G(0) = \frac{-1}{3} - 0 = \frac{-1}{3}$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



8
S **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

I. Hallamos la solución de $\frac{x}{x^2 - 2} = 0$. Es 0.

II. Como esta solución se encuentra fuera del intervalo de integración, los extremos son 2 y 3.

III. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, la cual es continua en dicho intervalo:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot ln\ |x^2 - 2|$$

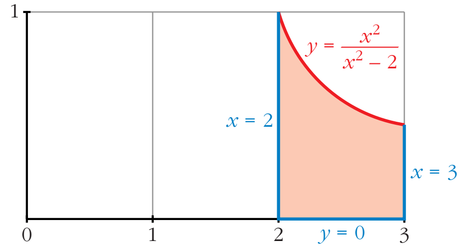
IV. $G(2) = \frac{1}{2} \cdot ln\ (2)$, $G(3) = \frac{1}{2} \cdot ln\ (7)$

V. $G(3) - G(2) = \frac{1}{2} \cdot [ln\ (7) - ln\ (2)]$

El área buscada es:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\ (7) - ln\ (2)]\ \text{u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



9 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$

a) $V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\ dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = 8\pi\ \text{u}^3.$

b) $V = \pi \cdot \int_{-1}^2 (x^2)^2\ dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 x^4\ dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \cdot \frac{31}{5}\ \text{u}^3.$

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^2)^2\ dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\ dx =$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}\ \text{u}^3.$$

10 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ **b)** $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $\sqrt{x} = x^2$. Son 0 y 1.

Estos son nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = \sqrt{x} - x^2$

III. $V = \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x + x^4 - 2x^{5/2}) dx =$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{4}{7}x^{7/2}\right]_0^1 = \frac{9}{70}\pi\ \text{u}^3$$

b) $V = \pi \cdot \int_0^4 f(x)^2\ dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x)^2 dx = \pi \cdot [8x^2]_0^4 = 128\pi\ \text{u}^3$

11 **S** **Calcula:** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\ x \cdot cos\ x\ dx = \int_0^{\ \ /2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ \ /2} = \frac{1}{4}$$

Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\ x = t; \quad cos\ x \cdot dx = dt$

para $x = 0; \quad t = 0$

para $x = \dfrac{\pi}{4}; \quad t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12 **S** **Halla el valor de la integral definida de la función** $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)$ **en el intervalo** $I = [0, 2]$.

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3 \cdot cos\ (2\pi x)\right) dx = \left[ln\ (x+1) - \frac{3 \cdot sen\ (2\pi x)}{2 \cdot \pi}\right]_0^2 =$$

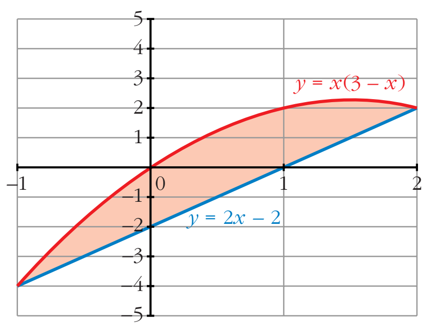
$$= ln\ (3) - ln\ (1) = ln\ (3)$$

PARA RESOLVER

13 **S** **a) Dibuja la región limitada por la curva** $y = x(3 - x)$ **y la recta** $y = 2x - 2$.

b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

a)



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x \cdot (3 - x) = 2x - 2$. Son -1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$f(x) = x \cdot (3 - x) - (2x - 2) = -x^2 + x + 2$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

IV. $G(-1) = \frac{-7}{6}$, $G(2) = \frac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$

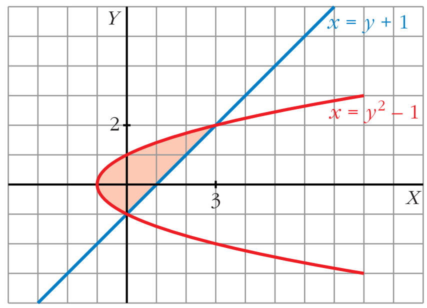
El área buscada es $\frac{9}{2}$ u^2.

14 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$.

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$ y 2.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \frac{7}{6}$, $G(2) = \frac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} = \frac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\frac{-9}{2}\right| = \frac{9}{2}$ u^2.

15 **Comprueba que $\int_0^2 |2x - 1|\, dx = \frac{5}{2}$.**

$$\int_0^2 |2x - 1| \cdot dx = \int_0^{1/2} (-2x + 1)\, dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\, dx =$$

$$= \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

16 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son 0 y 2.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por $(0, 0)$ tiene pendiente $f'(0) = 2$, por tanto es $y = 2x$.

La tangente que pasa por $(2, 0)$ tiene pendiente $f'(2) = -2$, por tanto es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

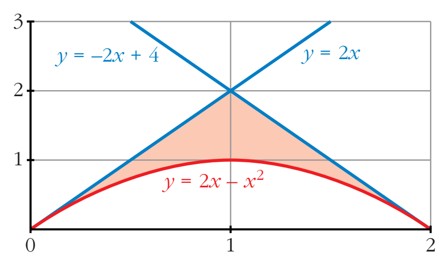
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \frac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}$, $G_2(2) = \frac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



17 **Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área limitada por la recta y la hipérbola.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $7 - x = \frac{6}{x}$. Son 1 y 6 (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot ln\ |x|$$

IV. $G(1) = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

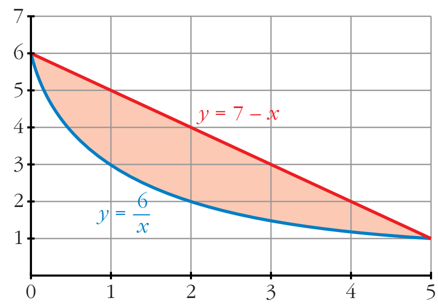
$G(6) = 24 - 6 \cdot ln\ (6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6 \cdot ln\ (6) - \frac{13}{2} = \frac{35}{2} - 6 \cdot ln\ (6)$

El área buscada es:

$$\frac{35}{2} - 6 \cdot ln\ (6)\ u^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



18 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto (0, 0), para ello calculamos la derivada de nuestra función:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y'(0) = 1$ (pendiente)

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son 0 y 2 (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$

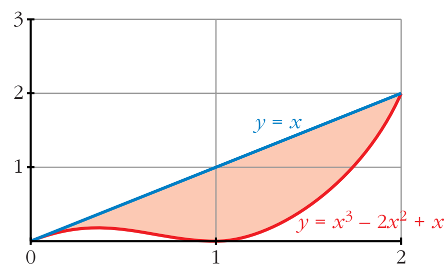
IV. Buscamos su primitiva: $G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \frac{-4}{3}$

$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}\ u^2$.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



Página 374

19 **S** **Halla el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{4}{9 + 2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.**

I. Buscamos los puntos de inflexión, para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

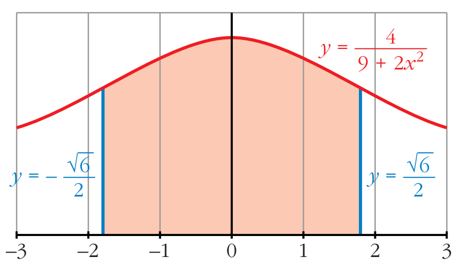
III. $G\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

El área buscada es: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).

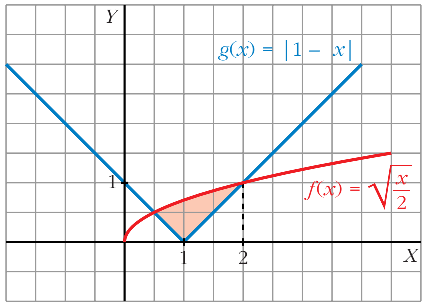


20 **S** **Si $f(x) =$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

a) $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \le 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$= (1 - x)$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2. (Límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: $\frac{1}{2}$ a 1 y 1 a 2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$h_1(x) = \quad - (1 - x)$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$h_2(x) = \quad - (x - 1)$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int \left(\quad + x - 1 \right) = \frac{4}{3} \left(\quad \right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int \left(\quad - x + 1 \right) = \frac{4}{3} \left(\quad \right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}; \quad H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}, \quad H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

$H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

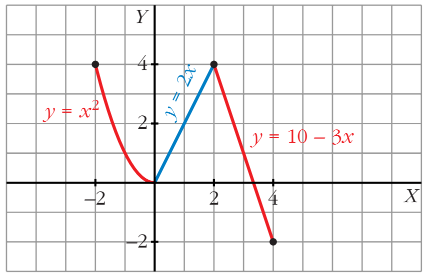
21
S

Se considera la función:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } \ \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } \ \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$



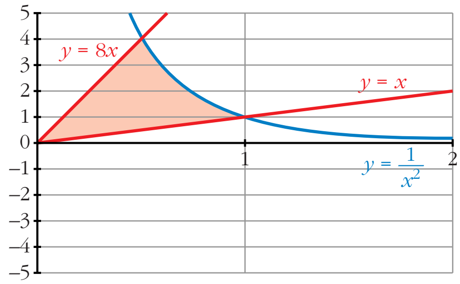
$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = \left[x^2\right]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

22
S

Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$\dfrac{1}{x^2} = x$: Solución $x = 1$.

$\dfrac{1}{x^2} = 8x$: Solución $x = \dfrac{1}{2}$.

$x = 8x$: Solución $x = 0$.

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int (8x - x)\,dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. $G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

$$G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

23
S **Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

Buscamos una primitiva a nuestra función:

$$G(x) = \int x^2 \cdot e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

(aplicando el método de integración por partes).

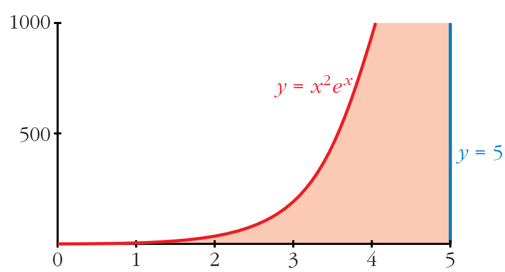
$$G(0) = 2$$

$$G(5) = 17 \cdot e^5$$

$$G(5) - G(0) = 17 \cdot e^5 - 2$$

El área buscada es $(17 \cdot e^5 - 2)$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



24 **S** **Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.**

Como el polinomio pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$, una raíz es $x = 3$, por tanto: $y = (x - 3) \cdot (ax - b)$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$, así: $1 = -3 \cdot (-b) = 3b$, $b = \dfrac{1}{3}$

Quedando: $y = (x - 3) \cdot \left(ax - \dfrac{1}{3}\right)$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \dfrac{1}{27}$

Por tanto, el polinomio es: $y = (x - 3) \cdot \left(\dfrac{1}{27}x - \dfrac{1}{3}\right)$

25 **S** **Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.**

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero: $y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\dfrac{1}{2}$ y de $\dfrac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

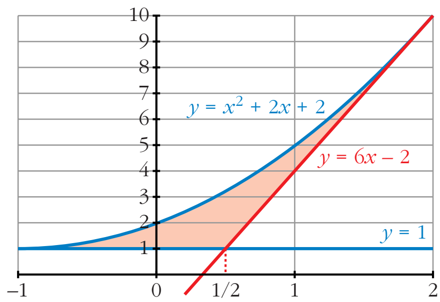
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\ \ G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



26 **S** **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.**

Calcula a, b, c y d.

Sabemos que pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir: $3a + 2b + c = 0$.

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que $3a + c = 0 \ \rightarrow\ c = -3a$.

Así, nuestra función queda reducida a la función: $f(x) = ax^3 - 3ax$.

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\frac{5a}{4}$ que es igual a $\frac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y por tanto $c = 3$.

La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

27 S **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

Supongamos que $x = a$ comprendido entre -1 y 2 es el punto donde nuestra función corta al eje X, por tanto tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de -1 a a y de a a 2.

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suponemos que en el primer intervalo la función es negativa, el área es:

$$G(-1) - G(a)$$

y si en el segundo intervalo la función es positiva, el área es:

$$G(2) - G(a)$$

Y como el área en los dos intervalos tiene que ser igual, se tiene la siguiente igualdad:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

es decir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k$$

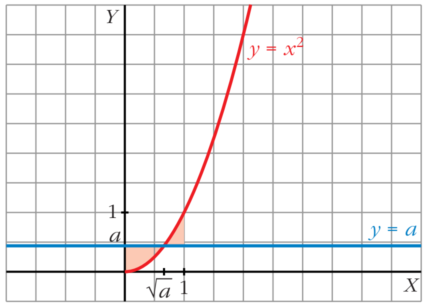
$$k = \frac{1}{2}$$

Observar que se obtiene el mismo resultado independientemente de qué intervalo consideremos en el que la función es positiva o negativa.

28 **S** **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:



Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1.

La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0,\ \ G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el primer intervalo es $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a},\ \ G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el segundo intervalo es $\dfrac{1}{3} - a + \dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \dfrac{1}{3}$

29 **S** **Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:**

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

a) Los puntos de corte se obtienen al igualar ambas ecuaciones:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a \cdot (x^2 - x - 1) = 0$$

Como suponemos $a \neq 0$, para que sean ciertamente una parábola y una recta, dividiendo toda la ecuación entre a, llegamos a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son: $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (las cuales no dependen de a).

b) La función diferencia es: $f(x) = ax + a - ax^2 = a \cdot (-x^2 + x + 1)$

Si llamamos $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a \cdot h(x)$

y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir:

$$G_1(x) = a \cdot H(x)$$

El área comprendida es por tanto:

$$G_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = a \cdot \left(H\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2.$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora:

$$f_2(x) = 2a \cdot h(x)$$

y su primitiva:

$$G_2(x) = 2a \cdot H(x)$$

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 2a \cdot \left(H\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2.$$

30 **S** **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.**

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\qquad \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3.$$

31 **Calcula el área limitada por $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.**

La función corta al eje X en $x = 0$.

Por otro lado, tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$.

Tenemos que distinguir entre dos intervalos: de -2 a 0 y de 0 a 2.

Hallamos la función primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2ln\,(x^2+4)$$

El área en el primer intervalo es:

$$G(-2) = 2 \cdot ln\,(8)$$

$$G(0) = 2 \cdot ln\,(4)$$

$$G(0) - G(-2) = 2 \cdot \big(ln\,(4) - ln\,(8)\big)$$

$$\Big|2 \cdot \big(ln\,(4) - ln\,(8)\big)\Big| = 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

El área en el segundo intervalo es:

$$G(2) = 2 \cdot ln\,(8)$$

$$G(2) - G(0) = 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)$$

$$2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

El área total es:

$$2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big) + 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big) = 4 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

32 **Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.**

I. Hallamos la función diferencia:

$$y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$$

II. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es $\left(e^2 - \dfrac{4}{3} - 1\right)$ u^2.

33 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.**

Buscamos una primitiva:

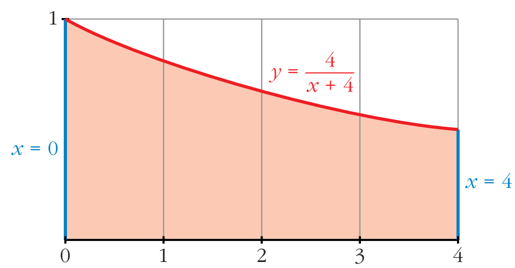
$$G(x) = 4 \cdot ln\ |x + 4|$$

$$G(0) = 4 \cdot ln\ (4)$$

$$G(4) = 4 \cdot ln\ (8)$$

$$G(4) - G(0) = 4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$$

El área buscada es $4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$ u^2.



$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{8} = 2\pi \text{ u}^3.$$

Página 375

34 **Halla el área de la región del plano limitado por la curva $y = ln\ x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas.**

La curva $y = ln\ x$ e $y = 2$ se cortan en $x = e^2$, por tanto los límites de integración son 1 y e^2. Por otro lado, la región comprendida entre 0 y 1.

Así que distinguimos dos intervalos: de 0 a 1 y de 1 a e^2.

En el primer intervalo, la función diferencia es: $y = 2 - 0 = 2$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = 2x$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(1) = 2$$

$$G_1(1) - G_1(0) = 2$$

El área para el primer intervalo es 2 u^2.

En el segundo intervalo, la función diferencia es:

$$y = 2 - ln\ x$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot ln\ |x| - x) = 3x - x\,ln\ |x|$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

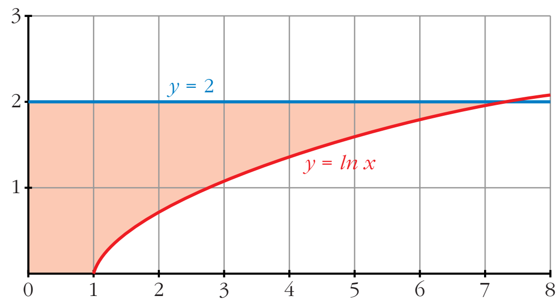
$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

El área para el segundo intervalo es $(e^2 - 3)$ u^2.

Por tanto, el área total es:

$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1) \text{ u}^2.$$



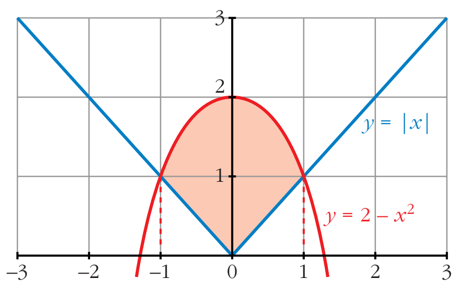
35 **Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:**

a) $y = 2 - x^2$, $y = |x|$

b) $xy + 8 = 0$, $y = x^2$, $y = 1$

c) $y = sen\ x$, $y = cos\ x$, $x = 0$

a)



Se cortan en $x = -1$ y $x = 1$.

En el intervalo de -1 a 0, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En el intervalo de 0 a 1, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Por simetría, basta calcular el área en uno de los dos intervalos, por ejemplo, en el segundo. Buscamos su función primitiva:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

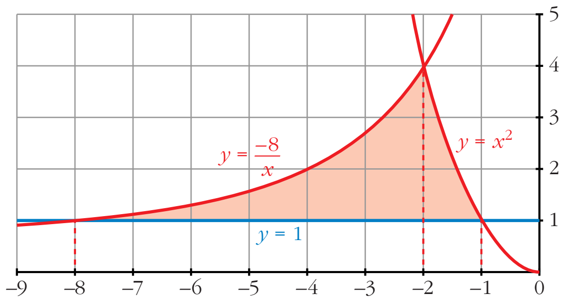
$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

El área total es $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ u^2.

b)



Las tres funciones se cortan 2 a 2 en: –8, –2 y –1.

Por tanto, calculamos el área en dos intervalos, de –8 a –2 y de –2 a –1.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = \frac{-8}{x} - 1$

Su primitiva es:

$G_1(x) = -8 \cdot ln\ |x| - x$

$G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-8) + 8$

$G_1(-2) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2$

$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2 + 8 \cdot ln\ (-8) - 8 =$

$$= -8 \cdot \big(ln\ (-2) - ln\ (-8)\big) - 6 = -8 \cdot ln \left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8ln\ 4 - 6$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$y = x^2 - 1$

Su primitiva es:

$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$

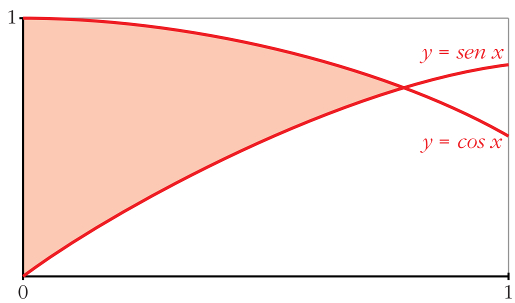
$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$

$G_2(-1) = \frac{2}{3}$

$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$

El área buscada es: $\left(8ln\ 4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8ln\ 4 - \frac{14}{3}\right)$ u^2

c)



Las dos curvas se cortan en $x = \frac{\pi}{4}$.

Por tanto, nuestros límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Buscamos la función diferencia:

$y = cos\ x - sen\ x$

Su primitiva es:

$G(x) = sen\ x + cos\ x$

$G(0) = 1$

$G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$

El área buscada es $(\sqrt{2} - 1)\ u^2$.

36 **Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\dfrac{9}{2}$, calcula el valor de b.**

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es:

$y = bx - x^2$

Su primitiva es:

$G(x) = \dfrac{bx^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

$G(0) = 0$

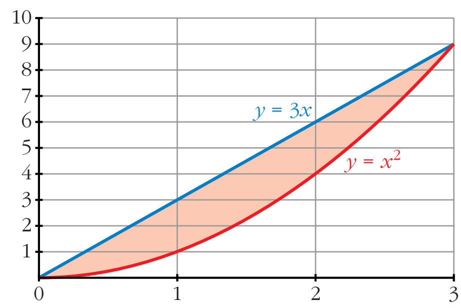
$G(b) = \dfrac{b^3}{6}$

$G(b) - G(0) = \dfrac{b^3}{6}$

Como el área es $\dfrac{9}{2}$, se tiene que:

$\dfrac{b^3}{6} = \dfrac{9}{2}$,

de donde obtenemos que $b = 3$.



37 **Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.**

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

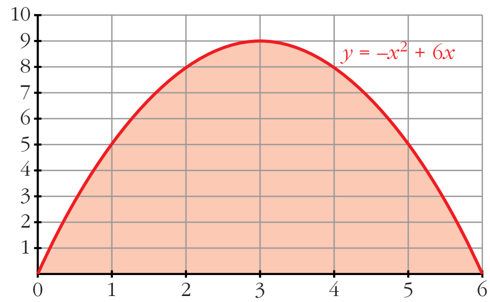
$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

de donde averiguamos que $a = 6$.



38 **Dada la función $y = \frac{2}{x+1}$, calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.**

Buscamos su primitiva:

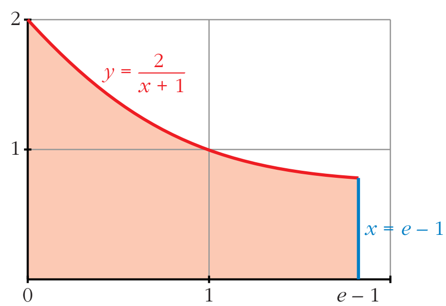
$$G(x) = 2 \cdot ln\,(x + 1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2 \cdot ln\,(a + 1)$$

$$G(a) - G(0) = 2 \cdot ln\,(a + 1)$$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2 \cdot ln\,(a + 1) = 2$, de donde averiguamos que $a = e - 1$.



39 **Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.**

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Si $k = 1$, nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia: $y = e^{2x} - e^x$

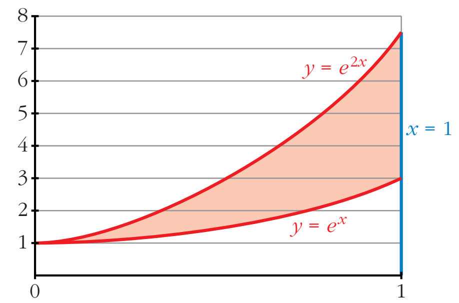
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

El área buscada es $\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right)$ u^2.



b) Ahora nuestros límites de integración son 0 y k. Como la función diferencia y su primitiva son las mismas que en el apartado a), se tiene que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Como el área es 2, se tiene que: $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2$

Resolviendo la ecuación, averiguamos que $k = ln\ (3)$.

40 **Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.**

Los puntos que determinan la cuerda son $(0, -3)$ y $(1, -4)$, de donde obtenemos la ecuación de la recta que contiene la cuerda:

$$y = -x - 3$$

Nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia:

$$y = x^2 - 2x - 3 - (-x - 3) = x^2 - x$$

Su primitiva es:

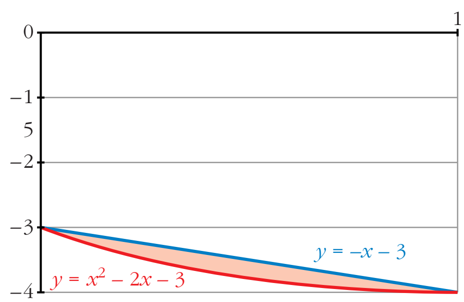
$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = \frac{-1}{6}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{-1}{6}$$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ u^2.



41 **Dadas $y = -x^2 + 1$ y la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de modo que el área entre la curva y la recta sea $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ u^2.**

La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{1-a}$ y $x = \sqrt{1-a}$.

La función diferencia es: $y = -x^2 + 1 - a$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G(-\sqrt{1-a}) = \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a \cdot \sqrt{1-a}$$

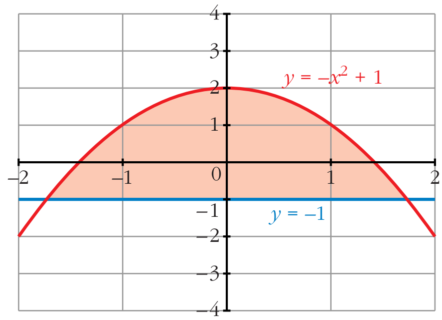
$$G(\sqrt{1-a}) = -\frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} + \sqrt{1-a} - a \cdot \sqrt{1-a}$$

$$G(\sqrt{1-a}) - G(-\sqrt{1-a}) = \frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a}$$

Como el área es $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, igualamos:

$$\frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que $a = -1$.



42 **Halla el área de la porción de plano encerrada entre las curvas $y = sen\ x$ e $y = sen\ 2x$ para valores de x en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.**

Las curvas se cortan en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Por tanto, tenemos dos intervalos de integración de: 0 a $\dfrac{\pi}{3}$ y de $\dfrac{\pi}{3}$ a $\dfrac{\pi}{2}$.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = sen\ 2x - sen\ x$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = \frac{-\cos 2x}{2} + \cos x$$

$$G_1(0) = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

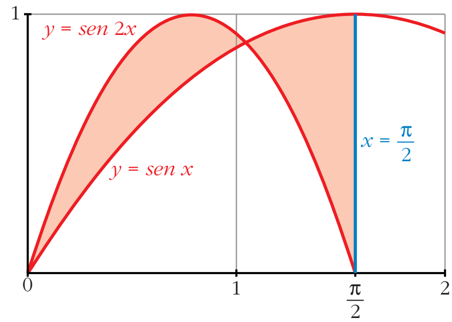
$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - G_1(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

La función diferencia en el segundo intervalo es: $y = sen\ x - sen\ 2x$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = -\cos x + \frac{\cos 2x}{2}$$



$$G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

El área buscada es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2.

43 **Halla el área comprendida entre la curva $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4x}{x^2+2x+1}\right) dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + 2 \cdot \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= x - 2 \cdot \ln (x+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

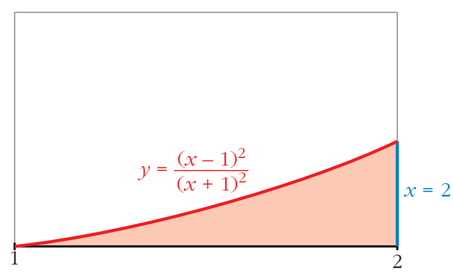
$$G(1) = -2 \cdot \ln (4) - 3$$

$$G(2) = \frac{2}{3} - 2 \cdot \ln (9)$$

$$G(2) - G(1) = \frac{2}{3} - 2\ln (9) + 2\ln (4) + 3 =$$

$$= \frac{11}{3} + 2\big(\ln (4) - \ln (9)\big) = \frac{11}{3} + 2\left(\ln \left(\frac{4}{9}\right)\right) u^2$$

El área buscada es $\left[\frac{11}{3} + 2\ln \left(\frac{4}{9}\right)\right]$ u^2.



44 **Calcula el área limitada por la hipérbola $xy = 1$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 1 y 4.**

La cuerda tiene por extremos los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Así, obtenemos que la ecuación de la recta que contiene a la cuerda es:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4}$$

Nuestros límites de integración son 1 y 4.

Calculamos la función diferencia:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}$$

Su primitiva es:

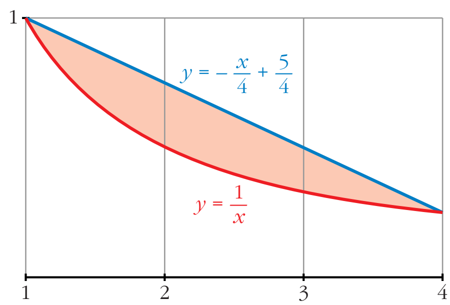
$$G(x) = \frac{-x^2}{8} + \frac{5x}{4} - ln\ |x|$$

$$G(1) = \frac{9}{8}$$

$$G(4) = 3 - ln\ 4$$

$$G(4) - G(1) = 3 - ln\ 4 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} - ln\ 4$$

El área buscada es $\left(\frac{15}{8} - ln\ 4\right)$ u^2.

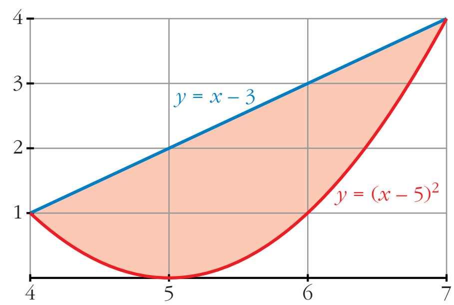


45 **La región limitada por la recta $y = x - 3$, la parábola $y = (x - 5)^2$ y el eje OX gira alrededor del eje OX. Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**

Buscamos los puntos de corte de la recta y la parábola:

$$x - 3 = (x - 5)^2$$

Se cortan en los puntos $(4, 1)$ y $(7, 4)$. Por tanto, nuestros límites de integración son 4 y 7.



Hallamos el volumen generado por la recta $y = x - 3$ alrededor de OX entre 4 y 7, y posteriormente le restamos el generado por la curva $y = (x - 5)^2$ alrededor de OX entre los mismos límites.

$$V_1 = \pi \cdot \int_4^7 (x - 3)^2\ dx = \pi \cdot \left[\frac{(x - 3)^3}{3}\right]_4^7 = 21 \cdot \pi \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_4^7 (x - 5)^4\ dx = \pi \cdot \left[\frac{(x - 5)^5}{5}\right]_4^7 = \frac{33}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

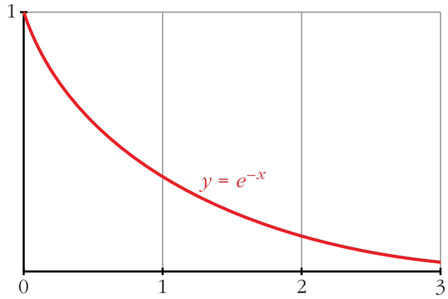
El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = 21 \cdot \pi - \frac{33}{5} \cdot \pi = \frac{72}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

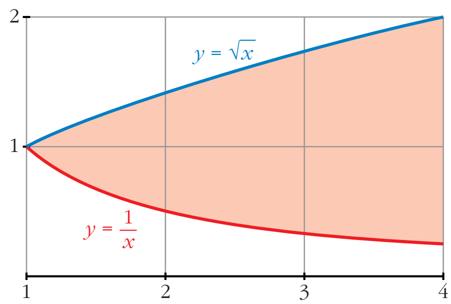
46 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje OX.**

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (e^{-x})^2\, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1) \text{ u}^3$$



47 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las funciones $y = \dfrac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ y $x = y^2$ se cortan en el punto de abscisa 1. Por tanto, nuestros límites de integración son 1 y 4.

El volumen buscado es el resultado de restar el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor de OX entre 1 y 4, y el volumen engendrado por la curva $y = \dfrac{1}{x}$ alrededor de OX entre los mismos límites.

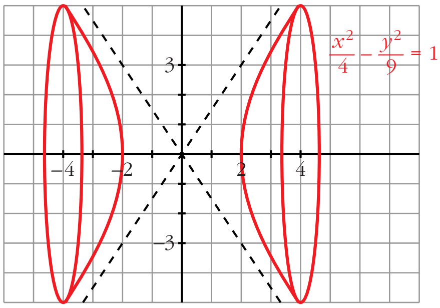
$$V_1 = \pi \cdot \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4} \text{ u}^3$$

El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4} \text{ u}^3$$

48 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ **cuando** $x \in [-4, 4]$**.**



$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 f(x)^2\, dx =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9\right) dx =$$

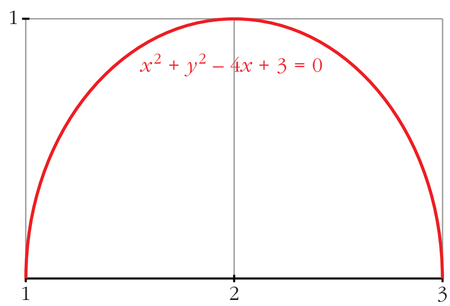
$$= 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x\right]_2^4 =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 24 = 48\pi \text{ u}^3$$

49 **Halla el volumen engendrado por el círculo** $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ **al girar alrededor de** OX**.**

El círculo del ejercicio tiene su centro en $(2, 0)$ y radio 1, por tanto corta el aje OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Así, nuestros límites de integración son 1 y 3.

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$



$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\, dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(1 - (x-2)^2\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ u}^3$$

50 **Obtén la familia de curvas en las que la pendiente de la tangente es** $f(x) = x\, e^{2x}$**. ¿Cuál de esas curvas pasa por el punto** $A(0, 2)$**?**

Buscamos su primitiva:

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx =$$

Utilizando el método de integración por partes obtenemos:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

Como pasa por $(0, 2)$, se tiene que: $-\frac{1}{4} + k = 2$, de donde $k = \frac{9}{4}$.

Así, la curva buscada es:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{9}{4}$$

51 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s², que su velocidad es 0 cuando $t = 3$ y que está en el origen a los 11 segundos.**

Llamamos $S(t)$ a la posición del móvil al cabo de t segundos. Así:

$$V(t) = S'(t) \text{ y } a(t) = S''(t) = 8 \text{ cm}/s^2$$

Calculamos la velocidad $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)dt = \int 8\ dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \quad \to \quad k = -24 \end{array}\right\} \ V(t) = 8t - 24$$

Calculamos $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\ dt = \int (8t - 24)\ dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \quad \to \quad c = -220$$

Por tanto: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

52 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s² y con velocidad inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre $t = 0$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$.**

- Calculamos la velocidad del móvil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)dt = \int 2\ dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} \ V(t) = 2t + 1$$

- Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)dt = \int_0^2 (2t + 1)dt = [t^2 + t]_0^2 = 6 \text{ m}$$

- Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)dt = [t^2 + t]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

- Por tanto, recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

Página 376

CUESTIONES TEÓRICAS

53 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t\ dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

a) $F(x) = \left[sen\ t\right]_0^{x^2} = sen\ x^2$

$F'(x) = 2x \cdot cos\ x^2$

b) Como f es una función continua en todos los puntos, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot cos\ x^2$$

54 Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes ejercicios:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x cos\ t^2\ dt$ **b)** $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (t^2 + t)\ dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_4^x \frac{1}{1 + sen^2\ t}\ dt$ **d)** $F(x) = \displaystyle\int_0^{sen\ x} (1 + t)\ dt$

a) Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = cos\ x^2$$

b) Como f es continua, también podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = [(x^2)^2 + x)\ 2x = 2x^5 + 2x^3$$

c) Aplicamos el teorema:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sen\ x}$$

d) Análogamente: $F'(x) = (1 + sen\ x) \cdot (sen\ x)' = (1 + sen\ x) \cdot cos\ x$

55 Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\ dt$$

Los máximos o mínimos relativos se obtienen para los valores de x donde la primera derivada es cero, en nuestro caso $F'(x) = 0$.

Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = x^2 - 1$$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, así en los puntos de abscisa -1 y 1, hay máximos o mínimos relativos.

56 Sabemos que $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = x^2(1 + x)$, **siendo continua en** $\mathbb{R}$**. Calcula** $f(2)$**.**

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$$f(x) = 2x \cdot (1 + x) + x^2$$

$$f(2) = 16$$

57 **Sea $F(x) = \int_1^x cos^2\, t\; dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

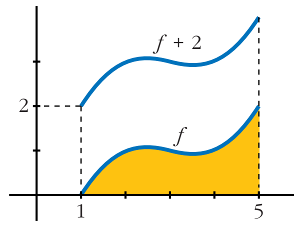
Como $f(x) = cos^2\, x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$$F'(x) = cos^2\, x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

58 **Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6.**

¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?

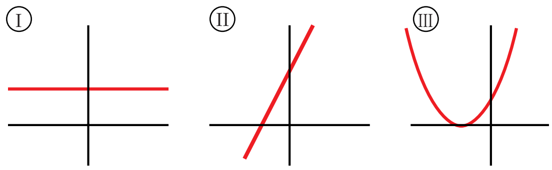


Es fácil ver que el área añadida es la de un rectángulo de base 4 u y 2 u de altura, su área es 8 u^2. Es decir, su área aumentará 8 u^2.

59 **Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?**

Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

60 **La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.**



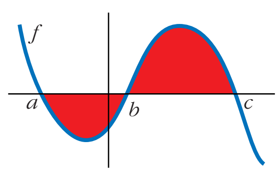
La gráfica II es la de la función,
la gráfica I es la de su derivada y la gráfica III la de su primitiva.

La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

61 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**

a) $\int_a^c f$; **b)** $\left|\int_a^c f\right|$; **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$; **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$



d).

62 **Si una función f no corta al eje X, cualquier primitiva de ella no puede tener máximos o mínimos. ¿Por qué?**

Cierto, porque la función f sería la derivada de su primitiva y al no ser nunca cero, no puede tener ni máximos ni mínimos.

63 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\, dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$. Es decir, $2f(c) = \int_0^2 x^2\, dx$. ¿Qué teorema asegura la existencia de c?**

$$\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$$

Así pues, se tiene: $2 \cdot f(c) = \dfrac{8}{3}$, de donde averiguamos que $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

64 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que $F(x) = \int_0^x ln(2 + t)\, dt$. Analiza si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:**

a) $F(0) = ln\, 2$ b) $F'(x) = \dfrac{1}{2 + x}$, $x \geq 0$

c) F es creciente en su dominio.

a) $F(x) = (x + 2) \cdot ln\, |x + 2| - (x + 2) - 2 \cdot ln\, 2 + 2$

$F(0) = 2 \cdot ln\, 2 - 2 - 2 \cdot ln\, 2 + 2 = 0$

Es falsa, además basta ver que no hay área.

b) Como f es continua para $x \geq 0$, aplicamos el teorema del cálculo integral:

$$F'(x) = ln\, |2 + x|$$

También es falsa.

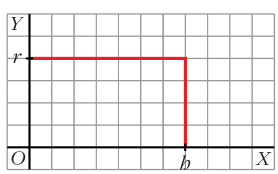
c) Cierta, porque su derivada F' es positiva en todo el dominio.

Página 377

PARA PROFUNDIZAR

65 **Deduce por integración el volumen del cilindro de radio r y altura h.**

Haz girar alrededor de OX el rectángulo limitado por la recta $y = r$ entre $x = 0$ y $x = h$.



$$V = \pi \cdot \int_0^h r^2\, dx = \pi \cdot \left[r^2 x\right]_0^h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

66 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera es** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$**.**

☛ ***La esfera se engendra al girar el círculo*** $x^2 + y^2 = R^2$ ***alrededor del eje*** X***.***

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2\, dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

67 **Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **es:**

a) $\frac{4}{3}\pi a b^2$ **si gira alrededor de** OX**.**

b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ **si gira alrededor de** OY**.**

a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a}\left(b^2 - x^2\frac{b^2}{a^2}\right) dx = \pi \cdot \left[b^2x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right]_{-a}^{a} =$

$$= \pi \cdot \left(b^2a - \frac{ab^2}{3} + b^2a - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot ab^2$$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b}\left(a^2 - y^2\frac{a^2}{b^2}\right) dy = \pi \cdot \left[a^2y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right]_{-b}^{b} =$

$$= \pi \cdot \left(a^2b - \frac{ba^2}{3} + a^2b - \frac{ba^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot ba^2$$

68 **Determina la función** $y = f(x)$ **sabiendo que su gráfica pasa por el punto** $P(1, 1)$**, que la tangente en** P **es paralela a la recta** $3x + 3y - 1 = 0$ **y que** $f''(x) = x$**.**

La información que tenemos es:

$f(1) = 1$

$f'(1) = -1$

$f''(x) = x$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + a$$

Como $f'(1) = -1$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + a = -1, \text{ entonces } a = \frac{-3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$$

Calculamos $f(x)$: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{2}x + b$

Como $f(1) = 1$, averiguamos que $b = \dfrac{7}{3}$, así: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{3}$

69 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3$ valga 108.**

La función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = a - 2$. Nuestros límites de integración; buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x+2)^2 - (x+2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^4}{4}$$

$$G(a-2) = \frac{a^4}{12}$$

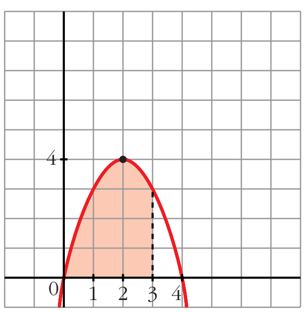
$$G(-2) = 0$$

$$G(a-2) - G(2) = \frac{a^4}{12}$$

Como el área tiene que ser 108, igualamos:

$$\frac{a^4}{12} = 108. \text{ De donde obtenemos que: } a = 6$$

70 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**



- $y = ax^2 + bx + c$
- Pasa por $(0, 0)$ $\to$ $y(0) = 0$ $\to$ $x = 0$
- $y'(0) = 4$ $\to$ $b = 4$

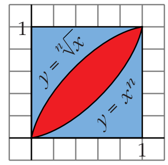
  $y = ax^2 + 4x$
- El área entre 0 y 3 es 9, así:

  $$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18 = 9$$

  De donde averiguamos que: $a = -1$

  Así, la función es: $y = -x^2 + 4x$

71 **Halla, si es posible, un número entero n, $n \geq 2$, para el cual sean iguales las áreas de los tres recintos: el rojo y cada uno de los dos azules.**



Para calcular el área central, hallamos la función diferencia:

$$y = \sqrt[n]{x} - x^n$$

Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{n-1}{n+1}$$

Por otro lado, el área de la zona que limita con OX la obtenemos con la siguiente función:

$$y = x^n$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{1}{n+1}$$

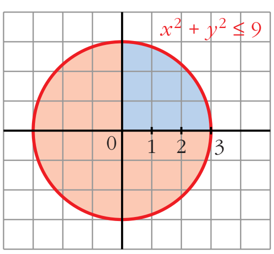
$$G(1) - G(0) = \frac{1}{n+1}$$

La región que falta tiene el mismo área que esta última. Como las áreas tienen que ser iguales, las igualamos:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

De donde deducimos que $n = 2$.

72 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ es 9π.**



- Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \qquad\qquad dx = 3 \cdot \int \qquad\qquad dx$$

Cambio: $\dfrac{x}{3} = sen\ t \ \rightarrow\ x = 3 \cdot sen\ t \ \rightarrow\ dx = 2 \cdot cos\ t \cdot dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 3cos\ t \cdot dt = 9\int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9\int\left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right)dt = 9\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\ sen^2\ t\right] = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\ sen^2\ t =$$

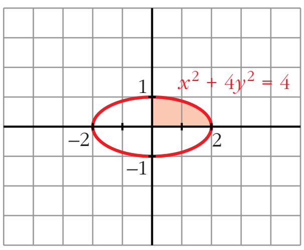
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \qquad =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \qquad =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

- Por tanto, el área será: $A = 4 \cdot \big(G(3) - G(0)\big) = 4 \cdot \dfrac{9\pi}{4} = 9\pi$

73 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.**



- Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \rightarrow\ y = \pm$$

- El área será: $A = 4 \cdot \displaystyle\int_0^2 \qquad dx$

- Calculamos $G(x) = \displaystyle\int \qquad dx$

Cambio: $\dfrac{x}{2} = sen\ t \ \rightarrow\ x = 2 \cdot sen\ t \ \rightarrow\ dx = 2 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 2cos\ t\ dt = 2\int cos^2\ t\ dt =$$

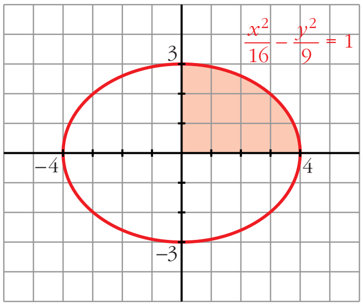
$$= 2 \cdot \int\left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right)dt = \int(1 + cos\ 2t)\ dt =$$

$$= t + \frac{sen^2\ t}{2} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \qquad =$$

$$= arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

- El área será: $A = 4 \cdot \big[G(2) - G(0)\big] = 4 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$

74 **Calcula el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



• $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \rightarrow$

$y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \rightarrow y = \pm 3 \cdot$

• El área es:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \qquad dx =$$

$$= 12 \int_0^4 \qquad dx$$

• Calculamos $G(x) = \int \qquad dx$

Cambio: $\frac{x}{4} = sen\ t \rightarrow x = 4 \cdot sen\ t \rightarrow dx = 4 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 4cos\ t\ dt = 4 \int cos^2\ t\ dt =$$

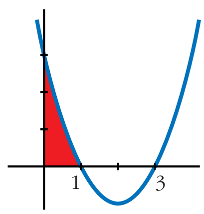
$$= 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (2 + 2cos\ 2t)\ dt =$$

$$= 2t + sen\ 2t = 2 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \qquad =$$

$$= 2 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{8}$$

• El área será: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$.

75 **Halla la expresión analítica de la función polinómica de segundo grado que corta al eje X en $x = 1$ y $x = 3$, y de la que sabemos que el área sombreada de la figura vale 4/3.**



Como corta al eje X en $x = 1$ y en $x = 3$, ha de ser:

$$f(x) = k \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = k \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

El área sombreada será:

$$A = \int_0^1 k \cdot (x^2 - 4x + 3)\, dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 =$$

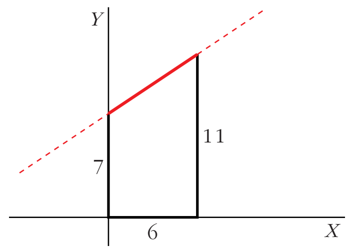
$$= k \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = 1$$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

76 **Halla el volumen de un tronco de cono de radios $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 11$ cm y altura 6 cm. Para ello, haz girar alrededor del eje X el segmento adecuado.**

¿Qué ecuación tiene la recta que sostiene al segmento rojo? ¿Cuáles son los límites de integración que debes tomar?



La recta pasa por los puntos $(0, 7)$ y $(6, 11)$. Obtenemos su ecuación:

$$m = \frac{11-7}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ la recta es } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 6$.

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx =$$

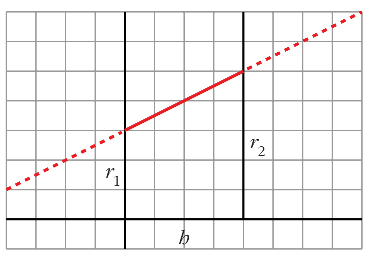
$$= \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \text{ u}^3.$$

77 **Para hallar la fórmula del volumen de un tronco de cono, debes proceder como en el ejercicio anterior, pero con dimensiones variables.**

Hazlo para un tronco de cono tal que los radios de sus bases sean r_1 y r_2 y su altura, h. Debes llegar a la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi\, h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$



La recta pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, r_2).

Obtenemos la ecuación: $m = \dfrac{r_2 - r_1}{h - 0} = \dfrac{r_2 - r_1}{h} \Rightarrow y = r_1 + \left(\dfrac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x$

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) x \right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^h \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x^2 \right]_0^h =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 h + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot h^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2) + r_1 r_2 - r_1^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$$