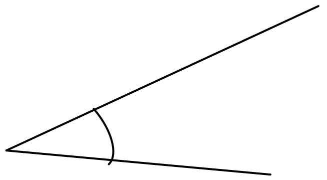
Exercicios de Trigonometría

1. Ángulo.

Ángulo *é a porción do plano comprendida entre dúas semirectas que teñen a mesma orixe. A orixe común chamase* ***vértice do ángulo****.*



Os ángulos positivos mídense no sentido contrario ás agullas do reloxo e os negativos no mesmo sentido das agullas.

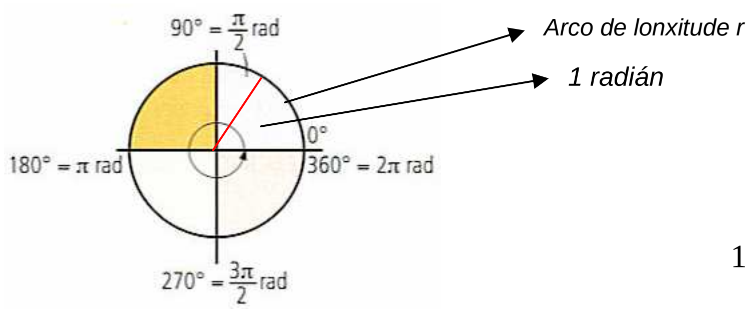
1.1. Representa sucesivamente os ángulos de 20º, 30º, 60º, 120º, 180º, 200º, 270º, 300º e anota o cuadrante no que queda o lado final.

1.2. Representa sucesivamente os ángulos de -20, -30, -60, -120, -180, -200, -270, -300 e anota o cuadrante no que queda o lado final.

2. Medida de ángulos.

Para medir a amplitude dos ángulos empregase o sistema sexaxesimal, a unidade de medida é o ***grao****, cada grao ten 60* ***minutos*** *e cada minuto 60* ***segundos****.*

Outra unidade de medida que tamén se usa é o ***radián****.*



$$1 \ \ radián \ = 1 \ \ radián \cdot \frac{180^0}{\pi \, radiáns} = \frac{180^0}{\pi}$$

$$1^0 \ = 1^0 \cdot \frac{\pi \, radiáns}{180^0} = \frac{\pi}{180} \ \ radiáns$$

Nunha circunferencia de radio r , debuxamos un arco de lonxitude igual a do radio da circunferencia, o ángulo que determina, dicimos que mide 1 radián. En xeral, o número de radios que mida o arco son os radiáns que mide o ángulo. Como a circunferencia mide 2π radios, un ángulo de 360º mide 2π radiáns.

Entón 180º é igual a π radiáns.

Dicimos ángulos de $\pi/3$ radiáns, de $\pi/2$ radiáns, etc.

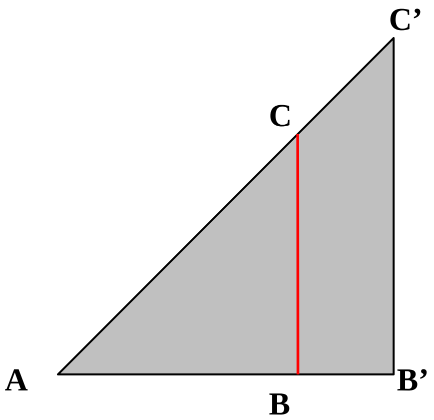
2.1. Pasa a radiáns : 30º, 90º, 270º, 300.

2.2. ¿Cantos radiáns son 45º, 60º, 220º, 120º, 90º, 180º, 330º?

2.3. ¿Cantos graos son $\frac{\pi}{3} rad$, $\frac{\pi}{6} rad$, $\frac{7\pi}{4} rad$, $\frac{\pi}{2} rad$?

3. Razóns trigonométricas dun ángulo

*Sexa **ABC** un triángulo rectángulo, recto en **B,** e **AB'C'** outro triángulo semellante ao primeiro**.** Definimos o seno, coseno e tanxente dun ángulo agudo da maneira seguinte*:



3.1. Calcula o seno, coseno e tanxente dun dos ángulos agudos dun triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 cm. e de hipotenusa 5 cm.

4. Relacións trigonométricas.

$$(sen\ A)^2 + (cos\ A)^2 = sen^2 A + cos^2\ A = 1 \qquad tg\ A = \frac{sen\ A}{cos\ A}$$

4.1. Si cos α = 0,63, calcula sen α y tg α sendo α un ángulo agudo.

4.2. Si tg α = 2, calcula sen α y cos α sendo $0<\alpha<90º$.

4.3. Si sen 37º = 0,6. Calcula cos 37º y tg 37º sen usar a calculadora.

4.4. Si sen $\alpha=\frac{3}{7}$. Calcula de forma exacta cos e tg α sendo $0<\alpha<90º$

4.5. Si o coseno dun ángulo agudo é $\frac{\sqrt{3}}{2}$**.** Calcula sen e tg de forma exacta.

5. Razóns trigonométricas de ángulos complementarios.

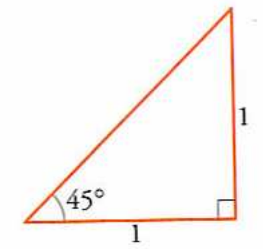
5.1. Atopas algunha relación entre as razóns trigonométricas dun ángulo agudo e o seu complementario. Escríbeas.

5.2. Proba para A: 45º, 67,2º e 85,7º. Se manteñen as relacións entre as razóns trigonométricas do ángulo es as do complementario.

5.3. Se coñecemos o sen A=0.391 e cos A=0.921. Saberías calcular a tg A e as tres razóns trigonométricas do ángulo complementario de A?

5.4. **Razóns trigonométricas de 30º, 45º e 60º.**

Debuxamos un triángulo rectángulo isósceles, de cateto 1.



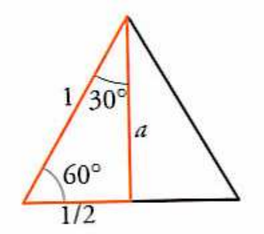
$$hipotenusa = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Polo tanto:

$$sen\ 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45^0 = \frac{sen\ 45^0}{cos\ 45^0} = 1$$

Debuxamos un triángulo equilátero de lado 1.



$$altura\ \ a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Polo tanto:

$$sen\ 30^0 = \frac{1}{2} \quad cos\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad tg\ 30^0 = \frac{1/\cancel{2}}{\sqrt{3}/\cancel{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad cos\ 60^0 = \frac{1}{2} \quad tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}/\cancel{2}}{1/\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

Utilización da calculadora en trigonometría.

Dado un ángulo α obter as súas razóns trigonométricas.
*Por exemplo o **sen 28º 30´***
Pon a calculadora en modo DEG
*Teclea **28 º ‘ “ 30 º ‘ “ sin** Obtemos: 0,477158760*
*Nalgunhas calculadoras hai que premer a tecla **sin** antes de introducir o ángulo, comproba como funciona a túa.*
*Se queremos obter o **cos** α ou a **tg** α procederemos da mesma forma pero pulsando as teclas **cos** e **tan** respectivamente.*

Dada unha razón obter o ángulo α correspondente.
Co mesmo valor que tes na pantalla :o seno dun ángulo é 0,477158760
Comproba que a calculadora segue en modo DEG
*Teclea **SHIFT sin** Obtemos : 28,5 en graos, se queremos graos, minutos e segundos, pulsamos **SHIFT** º ‘ “ obtendo 28º 30‘*
*O mesmo co **cos** e coa **tg.***

*Escríbese así**: sen A =** 0,477158760, entonces, **A= arc sen** 0,477158760 =28º 30’*

5.5. Calcular: sen 86º, cos 59º 27’ 43”, tg 86º 52’
5.6. Calcula o ángulo agudo α, en cada caso: a) sen α = 0,91 b) cos β = 0,42 c) tg φ = 5,83

6. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo consiste en calcular un ou máis elementos descoñecidos, lados ou ángulos, a partir dalgúns elementos coñecidos. Se o triángulo é rectángulo, un ángulo é 90º, basta coñecer dous dos seus elementos, un dos que debe ser un lado. Pódense dar dous casos:

CASO I : coñecidos dous lados
O terceiro lado obtense mediante o teorema de Pitágoras ou a partir das razóns trigonométricas que o relación con un dos coñecidos.
Un dos ángulos agudos áchase a partir da razón trigonométrica que o relaciona cos dous lados coñecidos.
E o outro ángulo agudo calculase polo complementario.

CASO II : coñecidos un lado e un ángulo
Os lados calcúlanse coa razón trigonométrica que o relaciona co ángulo e lado coñecidos
O ángulo agudo que falta é o complementario do que coñecemos.

6.1. Comproba o resultado dos seguintes exercicios na escena Descartes **CASO I A**
   a. A hipotenusa b dun triángulo rectángulo mide 6 cm e o cateto c 3 cm. Debuxa o triángulo e calcula os ángulos agudos A e C.
   b. Calcula os lados e ángulos descoñecidos dun triángulo rectángulo ABC no que un cateto c mide 2.5 cm e a hipotenusa b 3.5 cm.
   c. Unha escaleira de 3 metros apoiase na parede acadando unha altura de 2 metros. Qué ángulo forma a escaleira co chan?

6.2. Comproba o resultado dos seguintes exercicios na escena Descartes **CASO I B**
   a. Un triangulo rectángulo ten os dous catetos iguais. Canto valeran os ángulos agudos?
   b. Calcula o ángulo C sabendo que os catetos miden 150 mm y 360 mm, respectivamente.

6.3. Comproba o resultado dos seguintes exercicios na escena Descartes **CASO II C**
   a. Resolve o triángulo rectángulo ABC do que un cateto mide 4.5 cm e o ángulo oposto 18º.
   b. Resolve un triángulo rectángulo ABC do que un ángulo mide 60º e o cateto contiguo 8 cm.

6.4. Comproba o resultado dos seguintes exercicios na escena Descartes **CASO II C**
   a. Resolve o triángulo rectángulo ABC do que coñecemos a hipotenusa 10cm e o ángulo A=40º

6.5. Calcula a medida dos lados e ángulos descoñecidos dos seguintes triángulos rectángulos, dos que $\hat{A} = 90^o$
   a. $b = 5cm \quad c = 12cm$ Calcula $a, \hat{B}, \hat{C}$
   b. $c = 43cm \quad \hat{C} = 37^o$ Calcula $a, b, \hat{B}$
   c. $a = 5cm \quad \hat{B} = 65^o$ Calcula $b, c, \hat{C}$

6.6. Afonso está facendo voar un papaventos. Soltou 47 m. de fío e mide o ángulo que forma a corda coa horizontal é de 52º. A qué altura da man de Afonso se atopa o papaventos?

6.7. Estimar a altura dunha torre, sabendo que a súa sombra é de 13 m, cando os raios do sol fan un ángulo de 50 °co chan.

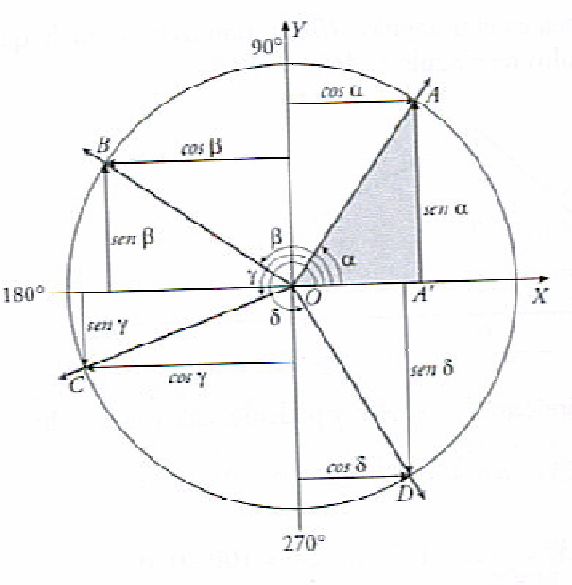
6.8. Dun triángulo rectángulo, sabemos que ten un ángulo de 45 °e un dos seus catetos 5 cm. Canto mide o outro cateto, a hipotenusa e o ángulo agudo?

6.9. Unha escaleira de 4 m está apoiada na parede. Cal será o ángulo que forma coa parede, se a súa base dista 2 m da parede? Que altura alcanza a escaleira sobre a parede.

6.10. Nun triángulo ABC o lado AB é de 12 m, o lado AC 23 m. e o ángulo A 50º. Pídese:
   a. A lonxitude da altura sobre o lado AC.
   b. Calcular a área do triángulo.

7. Razóns trigonométricas de ángulos de 0º a 360º

Trazamos unha circunferencia de ***radio 1****. Debuxamos uns eixes de coordenadas coa orixe no centro da circunferencia.*
Os ángulos os situamos co vértice no centro e un dos lados coincide ca parte positiva do eixe de coordenadas. O outro lado sitúase onde corresponda (40º, 120º,...)



7.1. Modifica o valor do ángulo ***Â*** para os valores indicados e observa como cambia o valor do seno

A	0º	30º	90º	120	π *rad*	210º	270º	315º	2π *rad*
sen A									

7.2. Para qué valores de ***Â*** é ***sen Â*** = 0?

7.3. Comproba que para calquera valor de ***Â*** tense que ***sen Â*** = *sen(****Â****+2****k****π)*, sendo ***k*** un número enteiro, que representa o número de voltas o redor da circunferencia.

- **a.** Comproba que: *sen* 390º = *sen* (360 + 30) = *sen* (2π + 30)=*sen* 30º
- **b.** Comproba con quen coincide *sen* 780º

7.4. Cal é o maior valor do *seno* dun ángulo ***Â***? E o menor?

7.5. Indica en qué cuadrantes o ***seno*** toma valores positivos e en cales negativos

cuadrante	**1º cuadrante** 0º<Â<90º	**2º cuadrante** 90< *Â<180º*	**3º cuadrante** 180< *Â<270º*	**4º cuadrante** 270< *Â<360º*
Signo *sen* ángulo				

7.6. Modifica o valor do ángulo ***Â*** e observa como cambia o valor do coseno:

A	0º	30º	90º	120	π *rad*	210º	270º	315º	2π *rad*
cos A									

7.7. Comproba que para calquera valor de ***Â*** tense que ***cosÂ*** = *cos(****Â****+2****k***p*)*, sendo ***k*** un número enteiro, que representa o número de voltas o redor da circunferencia.

- **a.** Comproba que: *cos* 390º = *cos* (360 + 30) = *cos* (2π + 30)=*cos* 30º
- **b.** Comproba con quen coincide *cos* 780º

7.8. Cal é o maior valor do *coseno* dun ángulo ***Â***? E o menor?

7.9. Indica en qué cuadrantes o ***coseno*** toma valores positivos e en cales negativos.

cuadrante	**1º cuadrante** 0º<Â<90º	**2º cuadrante** 90< *Â<180º*	**3º cuadrante** 180< *Â<270º*	**4º cuadrante** 270< *Â<360º*
Signo *cos* ángulo				

7.10. Comproba que para o ángulo ***Â*** = 120º cúmprese que $\cos^2 \hat{A} + \text{sen}^2 \hat{A} = 1$

7.11. ¿Para qué valores de ***Â*** es ***cos Â*** = 0?

7.12. Sabendo que tg ***Â*** = sen ***Â*** / cos ***Â***. Indica en qué cuadrantes a **tanxente** toma valores positivos e en cales negativos.

cuadrante	**1º cuadrante** 0º<Â<90º	**2º cuadrante** 90< *Â<180º*	**3º cuadrante** 180< *Â<270º*	**4º cuadrante** 270< *Â<360º*
Signo *tg* ángulo				

7.13. Di en qué cuadrante se atopan os seguintes ángulos e indica o signo das súas razóns trigonométricas.

Ángulo	Cuadrante	Signo sen	Signo cos	Signo tag
87°				
98°				
285°				
305°				
128°				
198°				

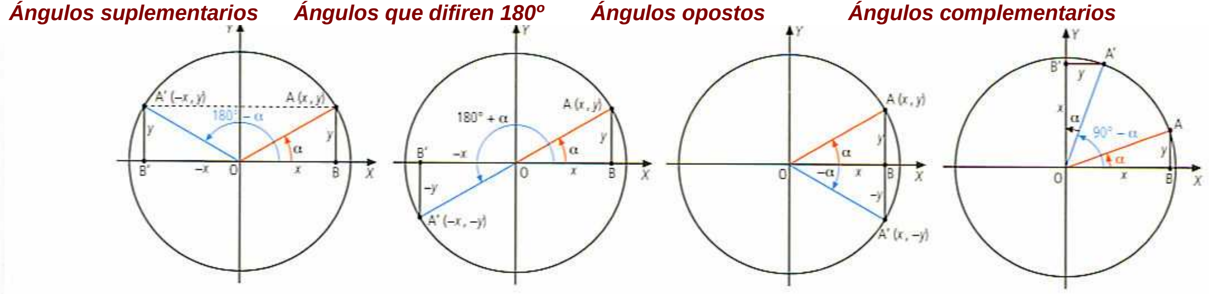
7.14. Sabendo que $sen\alpha = \frac{2}{3}$, e $90^o < \alpha < 180^o$ calcula o resto das razóns trigonométricas.

7.15. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, e $\alpha \in 4^o\ cuadrante$ calcula o resto das razóns trigonométricas.

7.16. Sabendo que $tg\alpha = \frac{5}{4}$, e $\alpha \in 3^o\ cuadrante$ calcula o resto das razóns trigonométricas.

8. Relacións entre las razóns trigonométricas de ángulos

Ángulos suplementarios *Ángulos que difiren 180º* *Ángulos opostos* *Ángulos complementarios*



Ángulos suplementarios	Ángulos que difiren 180º	Ángulos opostos	Ángulos complementarios
sen (180º - α) = sen α	sen (180º + α) = - sen α	sen (- α) = - sen α	sen (90º - α) = cos α
cos (180º - α) = - cos α	cos (180º + α) = - cos α	cos (- α) = cos α	cos (90º - α) = sen α
tg (180º - α) = - tg α	tg(180º + α) = tg α	tg (- α) = - tg α	tg (90º - α) = 1/ tg α

8.1. Completa a seguinte táboa a partir das razóns de 30º, 45º e 60º ,sen usar la calculadora:

	120º	135º	150º	210º	225º	240º	315º	330º
sen								
cos								
tg								

8.2. Expresa as seguintes razóns trigonométricas en función de ángulos do primeiro cuadrante:

a) sen(-120º) *b) cos 3000º* *c) tg (-275º)* *d) tg 4500º* *e) cos 745º* *f) sen 4420º*

8.3. Calcula os ángulos comprendidos entre 0º e 360º tales que:

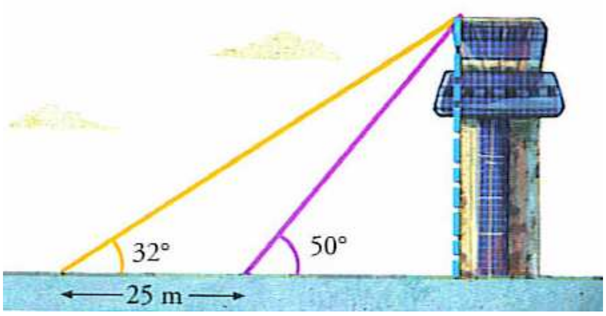
a. O seno sexa 0’7 b. O coseno sexa 0’54 c. A tanxente sexa 1’5

d. O seno sexa -0’3 e. O coseno sexa $-\frac{2}{3}$ f. A tanxente sexa -2

8.4. Se $tg\alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in 1^o$ cuadrante Calcula $tg(90^o - \alpha)$, $tg(\pi - \alpha)$, $tg(\pi + \alpha)$, $tg(-\alpha)$

9. Aplicacións

9.1. Desde o lugar onde me encontro, a visual da torre forma un ángulo de 32º coa horizontal. Se me achego 15 m, o ángulo é de 50º. Cal é a altura da torre?



9.2. Desde un certo punto dun terreo mirase ao alto duna montaña, a visual forma un ángulo de 50º co chan. Ao afastarse 200 m da montaña,o ángulo é de 35º . Calcula a altura, da montaña.

9.3. Desde un barco vese o punto mais alto dun acantilado cun ángulo de 74º. Sabendo que a altura d acantilado é de 200 m. A qué distancia se encontra o barco do pe do acantilado?

9.4. Calcula a área dun triángulo do que coñecemos dous ángulos de 30º e 45º e o lado oposto ao ángulo de 45º mide 10 cm.

9.5. Calcula a área dun triángulo do que coñecemos un ángulo de 50º e os lados que forman o ángulo mide 23 e 12 m.

9.6. Simplifica:

a. $$\frac{sen^2\alpha}{1+cos\,\alpha}$$

b. $\frac{1}{\cos x} - \cos x - tg^2 x \cdot \cos x$

c. $\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{senx}$

d. $\frac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{sen\alpha - sen^3\alpha}$