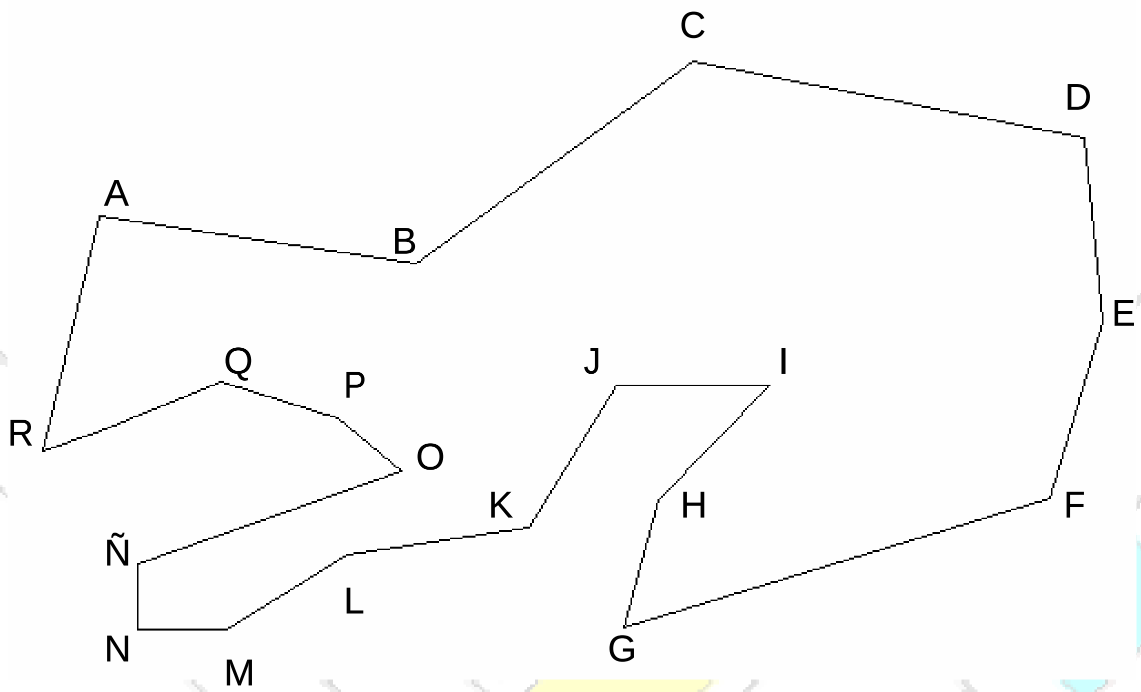
Alumno/a____ 4º____ESO Nº___

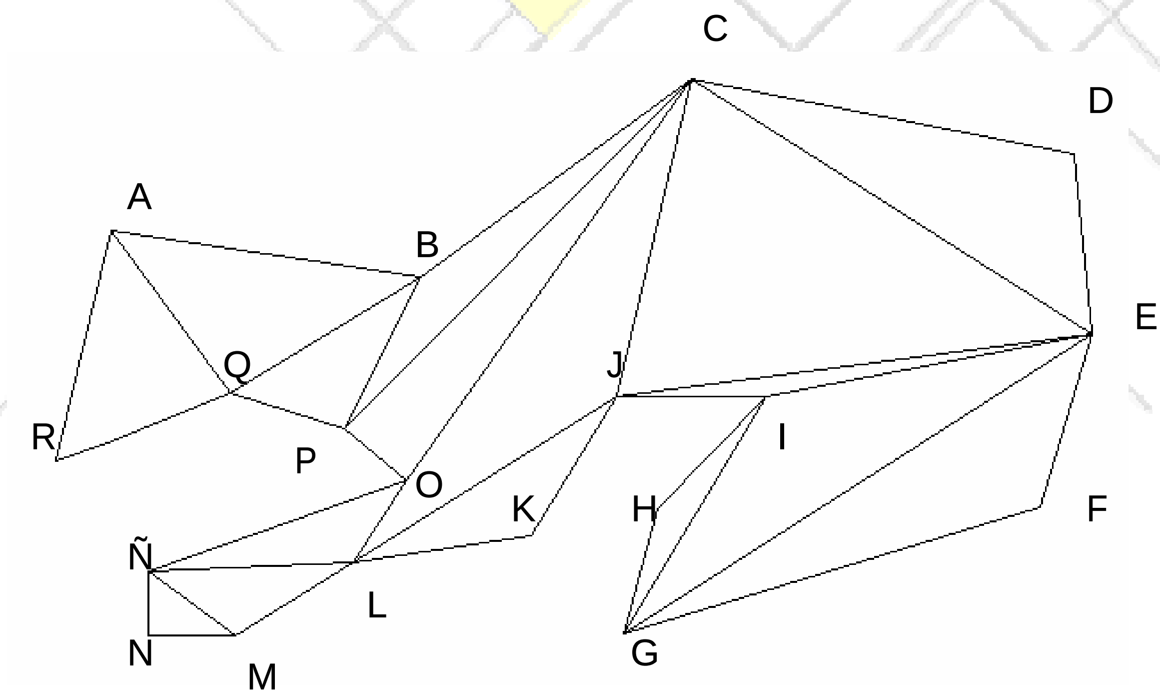
TRIGONOMETRIA 1º PARTE

Introducción

Un recinto poligonal siempre lo podemos dividir en triángulos. Como por ejemplo

Lo podemos dividir en triángulos





Entonces en el estudio de figuras semejantes; cuando son muy complicadas; podemos intentar triangular las figuras uniendo los vértices correspondientes de la misma forma y luego ver si los triángulos correspondientes son semejantes. Lo mismo sucede si queremos calcular el área de un recinto muy complicado, lo mejor es triangular ese recinto, calcular el área de cada triángulo, en el que se ha dividido el recinto y el área del recinto, será la suma de las áreas de los triángulos

Además si tenemos un triangulo $\widehat{ABC}$ Figuras 1 y 2

Fíjate que podríamos conocer sus lados, ángulos, perímetro y área si conociéramos, esos elementos en los triángulos los triángulos rectángulos, $\widehat{ABH}$ y $\widehat{CBH}$.$\overline{BH}$, es la altura del triángulo.

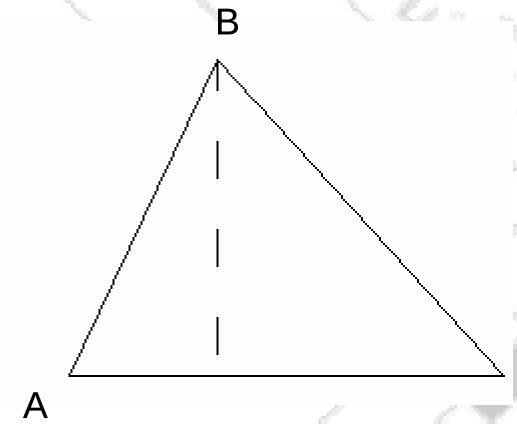


Figura 1

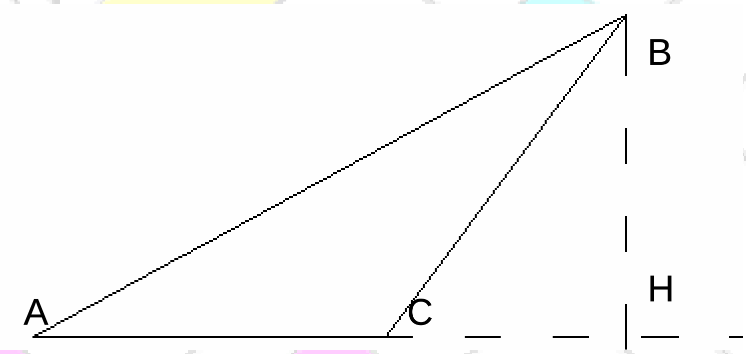


Figura 2

Como puedes ver si conseguimos determinar bien, los lados de cualquier triángulo rectángulo podemos utilizarlos, para calcular los lados de otros triángulos que no son rectángulos.

Actividad 1

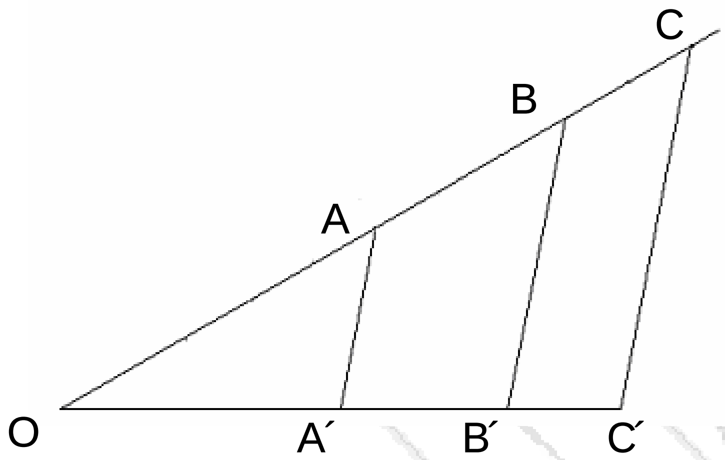
1.1 Completa la tabla.

Lados del Triángulo OAA´	Lados homólogos del Triángulo OBB´	Proporción con letras	Proporción con los datos conocidos de los lados
OA =		______ = ______ = ______	______ = ______ = ______
AA´=			
OA´=			Razón de semejanza

Lados del Triángulo OAA´	Lados homólogos del Triángulo OCC´	Proporción con letras	Proporción con los datos conocidos de los lados
OA =		$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$	$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
AA´=			
OA´=			Razón de semejanza

Cálculos lado OC	Cálculos lado OC´

Lee y comprueba con la segunda escena.



a) Si mantenemos fijo el ángulo $\widehat{O}$ y cambiamos el tamaño de los triángulos $\widehat{OAA'}$ y $\widehat{OBB'}$ Los cocientes $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}} = 0,693$ Permanecen constantes.

b) Mueve el punto C Hasta que el lado $\overline{CC'} = 23,61$ Fíjate que los cocientes cambian $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}} = 0,714$ Esto es lo mismo que cambiar el ángulo $\widehat{O}$

Cambia el punto C y completa la la siguiente tabla con los datos que obtengas

$\overline{OA} =$

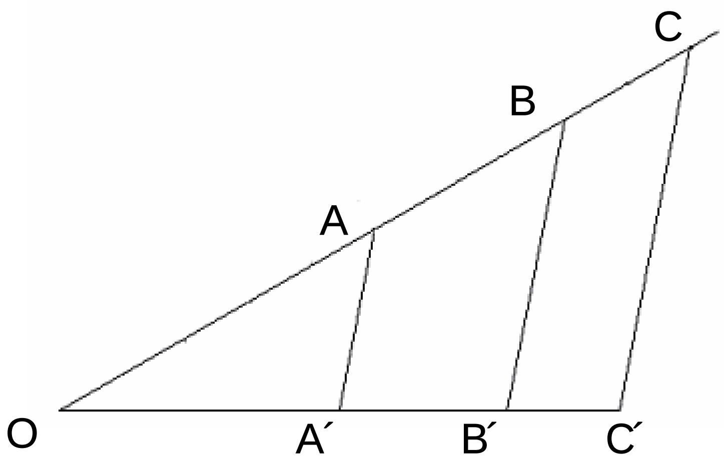
$\overline{AA'} =$

$\overline{OB'} =$

$\overline{BB'} =$

$\overline{OC} =$

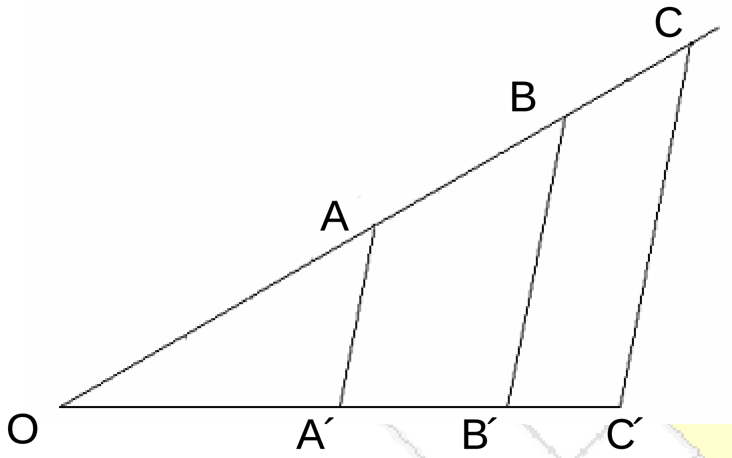
$\overline{CC'} =$



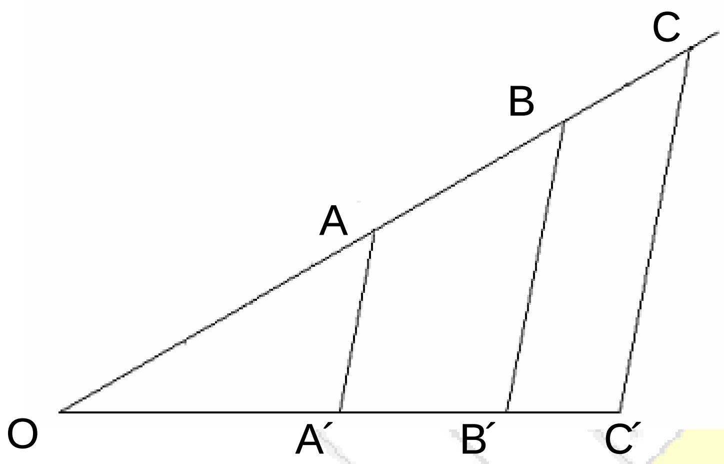
Proporción $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}}$

______ = ______ = ______ =

Actividad 2
2...1

Lados que tienes que considerar con sus medidas	
$\overline{} =$ $\overline{0A'} =$ $\overline{} =$ $\overline{} =$ $\overline{OC} =$ $\overline{} =$ 	Proporción $\dfrac{\overline{}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{}}{} = \dfrac{\overline{OC}}{}$ $\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ =$

Cambia el punto C y C´ y completa la tabla

Lados que tienes que considerar con sus medidas $\overline{} =$ $\overline{0A'} =$ $\overline{} =$ $\overline{} =$ $\overline{OC} =$ $\overline{} =$  	Proporción $\dfrac{\overline{}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{}}{} = \dfrac{\overline{OC}}{}$ ________ = ________ = ________ =

2.2

Lados que tienes que considerar con sus medidas

$\overline{AA'}$ =

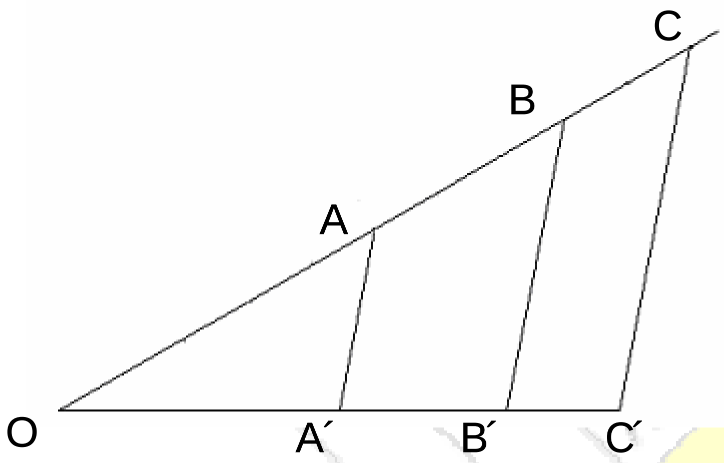
____ =

____ =

$\overline{OB'}$ =

____ =

____ =



Proporción $\dfrac{\overline{AA'}}{\_\_\_} = \dfrac{\_\_\_}{\overline{OB'}} = \dfrac{\_\_\_}{\_\_\_}$

________ = ________ = ________ =

Cambia el punto C y C´ y completa la tabla

Lados que tienes que considerar con sus medidas

$\overline{AA'} =$

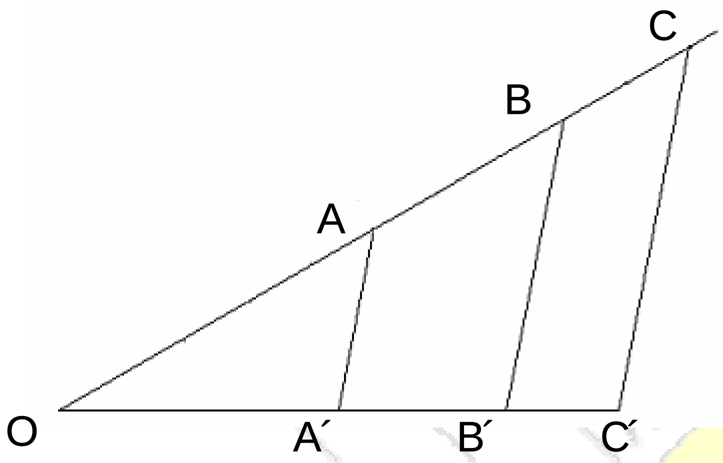
$\_\_\_\_ =$

$\_\_\_\_ =$

$\overline{OB'} =$

$\_\_\_\_ =$

$\_\_\_\_ =$



Proporción $\dfrac{\overline{AA'}}{\_\_\_\_} = \dfrac{\_\_\_\_}{\overline{OB'}} = \dfrac{\_\_\_\_}{\_\_\_\_}$

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$

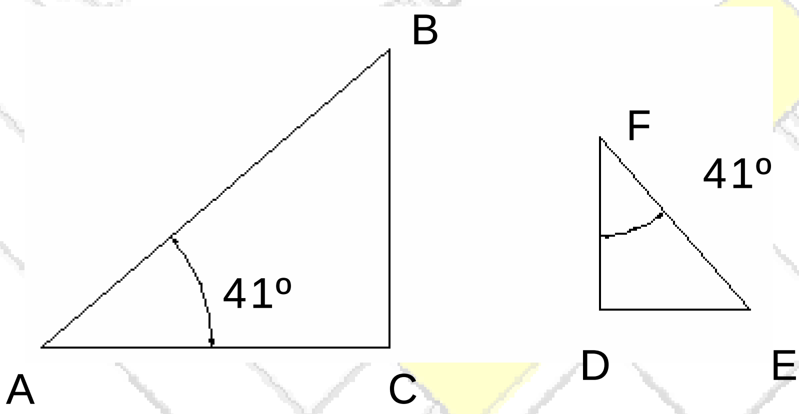
De lo anterior podemos, ver que cuando tenemos una colección de triángulos semejantes, hay ciertas proporciones que permanecen constantes, independientemente del tamaño del triángulo. Como se comentó en la introducción, todo lo podemos reducir a triángulos rectángulos. Nos vamos a fijar en las proporciones que podemos obtener cuando tenemos una colección de triángulos rectángulos.semejantes

Razones trigonométricas 1

Lee atentamente la introducción de esta página.

> **Recuerda que dos triángulos son semejantes si**
> **a) Tienen sus lados proporcionales**
> **o**
> **b) Sus ángulos son iguales**

En la siguiente figura tenemos dos triángulos rectángulos.



Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo son $180º$ o π rad. Entonces:

Ángulos $\widehat{ABC}$	Ángulos $\widehat{DEF}$
$\hat{A} = 41º$	$\hat{D} = 90º$
$\hat{C} = 90º$	$\hat{F} = 41º$
$\hat{B} = 180º - \hat{A} - \hat{C} = 180º - 41º - 90º = 49º$ $\hat{B} = 49º$	$\hat{E} = 180º - \hat{D} - \hat{F} = 180º - 41º - 90º = 49º$ $\hat{E} = 49º$

Fíjate entonces que los triángulos de la figura son semejantes, tienen los mismos ángulos. Por lo tanto tienen sus lados proporcionales.

> Recuerda que:
> ***Los lados homólogos son los comprendidos entre los mismos ángulos.***

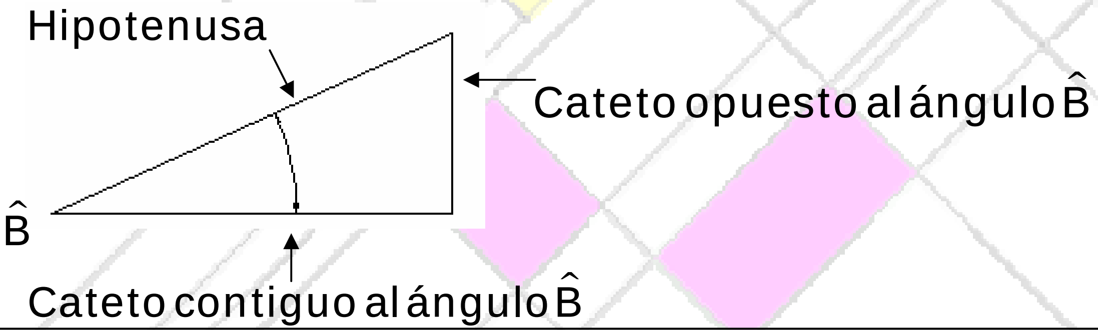
Completa la tabla

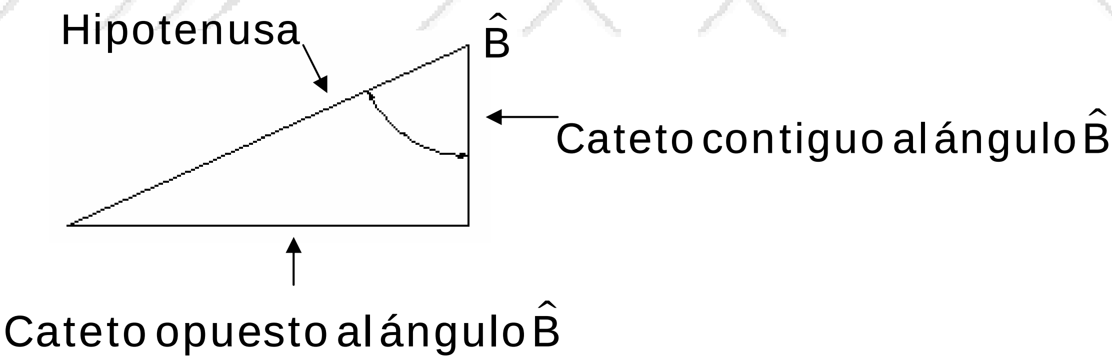
Lados del Triángulo $\widehat{ABC}$	Lados homólogos del Triángulo $\widehat{DEF}$	Proporción con letras
AB		
AC		$\underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$
BC		

De esta introducción podemos concluir que:

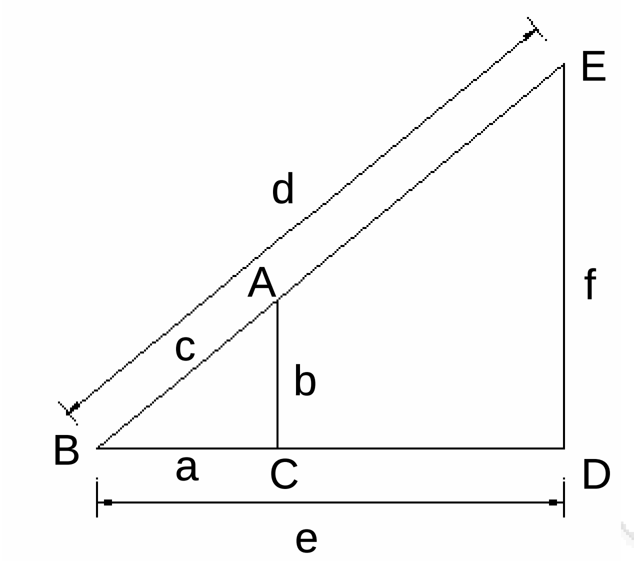
Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

Un triángulo rectángulo tiene dos catetos y una hipotenusa. Los catetos son los que forman el ángulo recto y la hipotenusa el lado opuesto al ángulo recto. Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos agudos, que están formados por la hipotenusa y un cateto. Si tomamos como punto de vista un ángulo agudo, del triángulo rectángulo, al cateto que forma parte del ángulo lo llamamos cateto contiguo a ese ángulo y al otro cateto opuesto a ese ángulo Fíjate en la figura siguiente.





En la siguiente figura tienes representados dos triángulos rectángulos, como en la escena de la actividad 3 y 4



Actividad 3

Triangulo

$\widehat{ABC}$		$\widehat{BDC}$	
Lados	Cocientes	Lados	Cocientes
$a =$	$\frac{b}{c} = \_\_\_\_\_\_ =$	$e =$	$\frac{f}{d} = \_\_\_\_\_\_ =$
$b =$	$\frac{a}{c} = \_\_\_\_\_\_ =$	$f =$	$\frac{e}{d} = \_\_\_\_\_\_ =$
$c =$	$\frac{b}{a} = \_\_\_\_\_\_ =$	$d =$	$\frac{f}{e} = \_\_\_\_\_\_ =$

Actividad 4

4.1 Ángulo $\hat{B} = 30^{o}$

Triangulo

$\widehat{ABC}$		$\widehat{BDC}$	
Lados	Cocientes	Lados	Cocientes
$a =$	$\frac{b}{c} = \_\_\_\_\_\_ =$	$e =$	$\frac{f}{d} = \_\_\_\_\_\_ =$
$b =$	$\frac{a}{c} = \_\_\_\_\_\_ =$	$f =$	$\frac{e}{d} = \_\_\_\_\_\_ =$

$c =$	$\frac{b}{a} = \underline{\qquad} =$	$d =$	$\frac{f}{e} = \underline{\qquad} =$

4.1 Ángulo $\hat{B} = 42^o$

Triangulo

$\overset{\frown}{ABC}$		$\overset{\frown}{BDC}$	
Lados	Cocientes	Lados	Cocientes
$a =$	$\frac{b}{c} = \underline{\qquad} =$	$e =$	$\frac{f}{d} = \underline{\qquad} =$
$b =$	$\frac{a}{c} = \underline{\qquad} =$	$f =$	$\frac{e}{d} = \underline{\qquad} =$
$c =$		$d =$	$\frac{f}{e} = \underline{\qquad} =$

Puedes mover los puntos A y D todo lo que quieras y veras que esos cocientes permanecen constantes siempre que no cambies el ángulo $\hat{B}$. Cuando cambias el ángulo $\hat{B}$ obtienes otras razones que permanecen constantes independientemente del tamaño de los triángulos $\overset{\frown}{ABC}$ y $\overset{\frown}{BDC}$

Actividad 5

Completa la tabla. Dando le al lado e los valores indicados.

Ángulo $\hat{B}$	Cateto e	Cateto f	Hipotenusa d	Razones trigonométricas
42^o	13			$sen(42^o) = \frac{f}{d} = \underline{\qquad} =$ $cos(42^o) = \frac{e}{d} = \underline{\qquad} =$ $tn(42^o) = \frac{f}{e} = \underline{\qquad} =$
42^o	5			$sen(42^o) = \frac{f}{d} = \underline{\qquad} =$ $cos(42^o) = \frac{e}{d} = \underline{\qquad} =$ $tn(42^o) = \frac{f}{e} = \underline{\qquad} =$

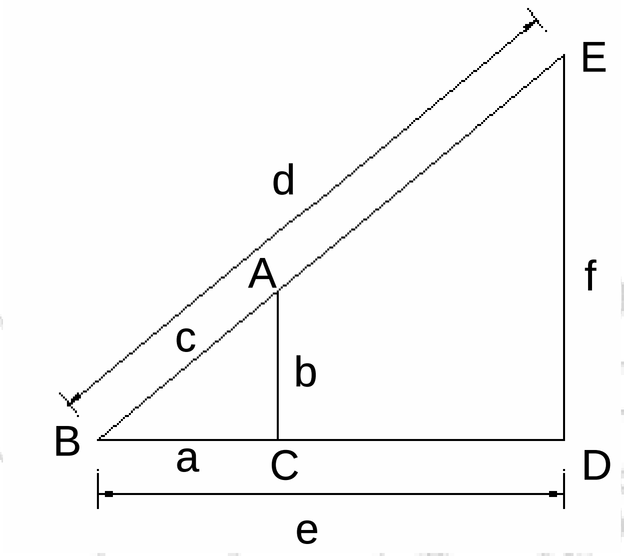
I.E.S. EDUARDO
BLANCO
AMOR

Ángulo $\hat{B}$	Cateto e	Cateto f	Hipotenusa d	Razones trigonométricas
42º	13,25			$sen(42º) = \frac{f}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $cos(42º) = \frac{e}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $tn(42º) = \frac{f}{e} = \_\_\_\_\_ =$
35º	9			$sen(35º) = \frac{f}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $cos(35º) = \frac{e}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $tn(35º) = \frac{f}{e} = \_\_\_\_\_ =$
35º	10,5			$sen(35º) = \frac{f}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $cos(35º) = \frac{e}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $tn(35º) = \frac{f}{e} = \_\_\_\_\_ =$
35º	4			$sen(35º) = \frac{f}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $cos(35º) = \frac{e}{d} = \_\_\_\_\_ =$ $tn(35º) = \frac{f}{e} = \_\_\_\_\_ =$

Como puedes ver los cocientes no cambian cundo cambias el tamaño del tamaño del triángulo. Solo cambian cuando cambias el ángulo $\hat{B}$

Veamos que esto es cierto en general.

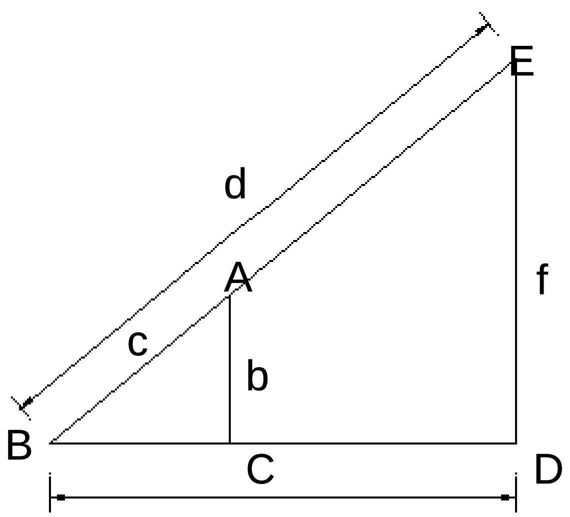
Fíjate que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BDE}$ son semejantes

<table>
<tr><th colspan="2">Tabla 1</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Sus lados son proporcionales</td></tr>
<tr><td>$$\frac{a}{e}=\frac{b}{f}=\frac{c}{d}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$(1) \quad (2) \quad (3)$$</td></tr>
</table>

Definición del seno de un ángulo Fíjate en la *Tabla 1*

Proporciones	Operaciones
$(2) \quad (3)$ $\downarrow \quad \downarrow$ $\frac{b}{f}=\frac{c}{d}$	$\frac{b}{f}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{f}{d}(*)$

Aclaración de $(*)$



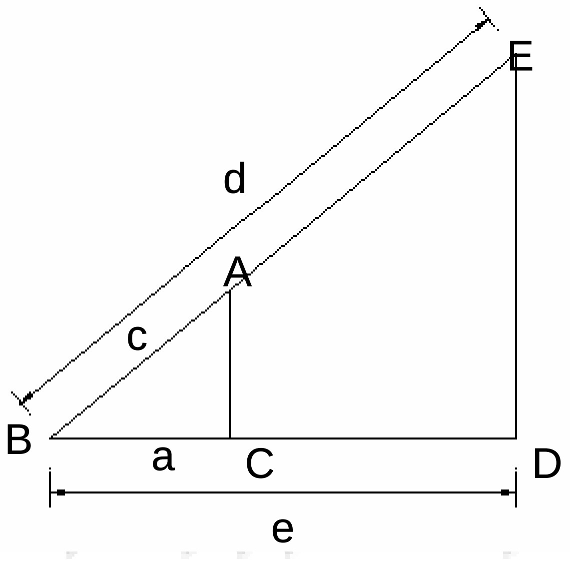
Fíjate que b y c son lados del triángulo $\widehat{ABC}$

b Es el cateto que esta enfrente del ángulo B y c es la hipotenusa del triángulo $\widehat{ABC}$, calculamos el cociente $\frac{b}{c}$. El mismo cociente lo calculamos en el triángulo $\widehat{BDE}$, utilizando los lados correspondientes f y d. Calculamos $\frac{f}{d}$. Fíjate que en

$(*)$ vemos que esos cocientes son iguales, y como has visto en la escena solo cambian cuando cambias el ángulo $\hat{B}$. Entonces para cada ángulo agudo $\hat{B}$ le podemos asociar el número $\frac{b}{c}$. A este número le llamamos *seno de ángulo* $\hat{B}$ y lo denotamos $\operatorname{sen}\left(\hat{B}\right)=\frac{b}{c}$. Este cociente se pude definir con respecto al ángulo $\hat{B}$ como $\operatorname{sen}\left(\hat{B}\right)=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$

Definición del coseno de un ángulo Fíjate en la *Tabla 1*

Proporciones	Operaciones
$(1)\ (3)$ $\downarrow\ \downarrow$ $\frac{a}{e}=\frac{c}{d}$	$\frac{a}{e}=\frac{c}{d}\Rightarrow$ $\frac{a}{c}=\frac{e}{d}(**)$

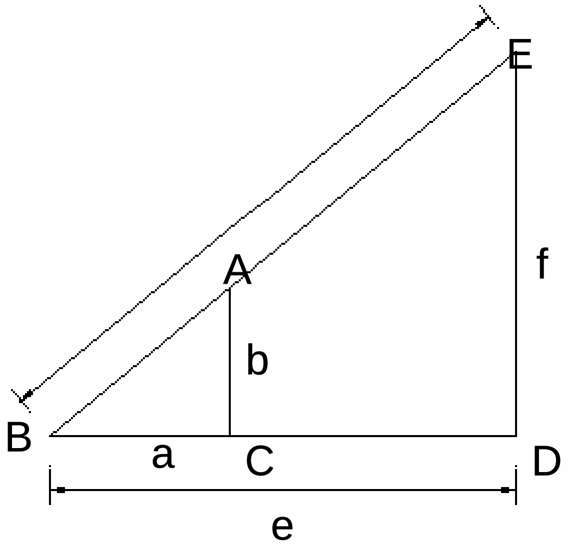


Aclaración de $(**)$

Fíjate que a y c son lados del triángulo $\widehat{ABC}$ a es el cateto contiguo al ángulo B y c es la hipotenusa del triángulo $\widehat{ABC}$, calculamos el cociente $\frac{a}{c}$. El mismo cociente lo calculamos en el triángulo $\widehat{BDE}$, utilizando los lados correspondientes e y d. Calculamos $\frac{e}{d}$. Fíjate que en $(**)$ vemos que esos cocientes son iguales, y como has visto en la escena solo cambian cuando cambias el ángulo $\hat{B}$. Entonces para cada ángulo agudo $\hat{B}$ le podemos asociar el número $\frac{a}{c}$. A este número le llamamos *coseno de ángulo* $\hat{B}$ y lo denotamos $\cos\left(\hat{B}\right)=\frac{b}{c}$. Este cociente se pude definir con respecto al ángulo $\hat{B}$ como $\cos\left(\hat{B}\right)=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$

Definición del tangente de un ángulo Fíjate en la *Tabla 1*

Proporciones	Operaciones
$\begin{matrix}(1) & (2)\\ \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{a}{e}=\frac{b}{f}}\end{matrix}$	$\frac{a}{e}=\frac{b}{f} \Rightarrow$ $\frac{f}{e}=\frac{b}{a}(***)$



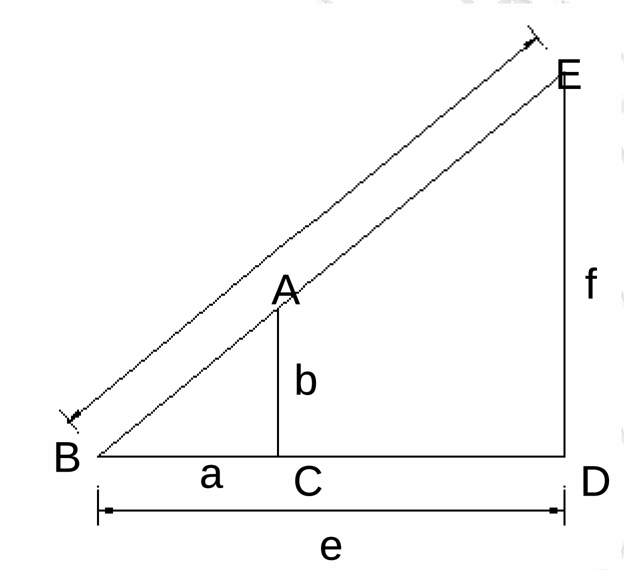
Aclaración de $(***)$

Fíjate que a y b son los cateto del triángulo $\widehat{ABC}$ a es el cateto contiguo al ángulo B y e es el cateto opuesto al ángulo B en triángulo $\widehat{ABC}$, calculamos el cociente $\frac{b}{a}$. El mismo cociente lo calculamos en el triángulo $\widehat{BDE}$, utilizando los lados correspondientes e y f. Calculamos $\frac{f}{e}$. Fíjate que en $(***)$ vemos que esos cocientes son iguales, y como has visto en la escena solo cambian cuando cambias el ángulo $\hat{B}$. Entonces para cada ángulo agudo $\hat{B}$ le podemos asociar el número $\frac{f}{e}$. A este número le llamamos *tangente de ángulo* $\hat{B}$ y lo denotamos $tn\left(\hat{B}\right)=\frac{b}{c}$. Este cociente se pude definir con respecto al ángulo $\hat{B}$ como

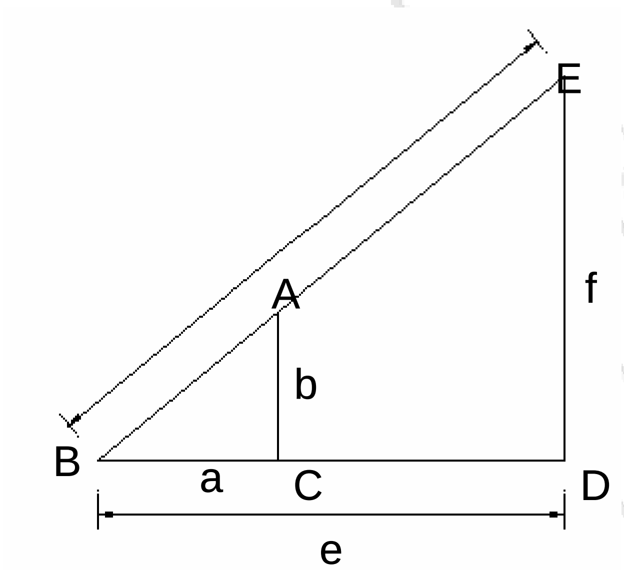
$$tn\left(\hat{B}\right)=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Actividad 6

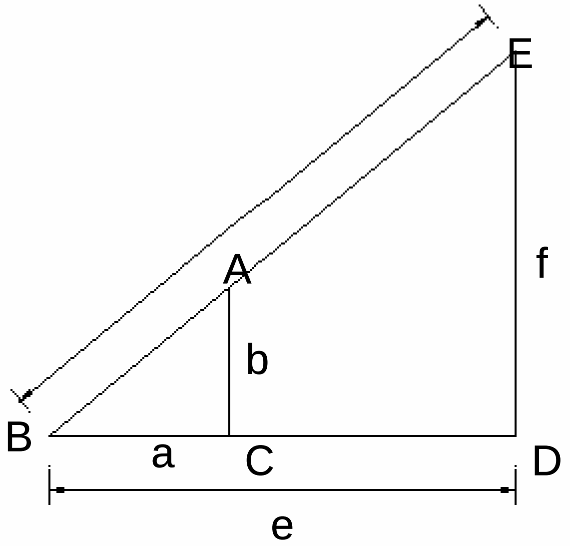
6.1 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 35^{\circ}$

Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
	$\text{sen}(35^{\circ}) = \dfrac{b}{c} = \rule{1cm}{0.4pt} =$ $\cos(35^{\circ}) = \dfrac{a}{c} = \rule{1cm}{0.4pt} =$ $\text{tn}(35^{\circ}) = \dfrac{b}{a} = \rule{1cm}{0.4pt} =$	$\text{sen}(35^{\circ}) = \dfrac{f}{d} = \rule{1cm}{0.4pt} =$ $\cos(35^{\circ}) = \dfrac{e}{d} = \rule{1cm}{0.4pt} =$ $\text{tn}(35^{\circ}) = \dfrac{f}{e} = \rule{1cm}{0.4pt} =$
		Cálculos d
		Cálculos e

6.3 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 45^{o}$

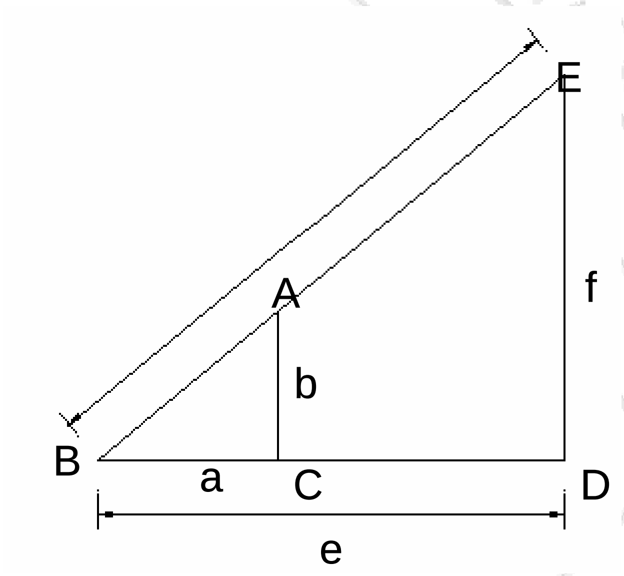
Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
	$\operatorname{sen}(45^{o}) = \frac{b}{c} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$ $\cos(45^{o}) = \frac{a}{c} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$ $\operatorname{tn}(45^{o}) = \frac{b}{a} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$	$\operatorname{sen}(45^{o}) = \frac{f}{d} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$ $\cos(45^{o}) = \frac{e}{d} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$ $\operatorname{tn}(45^{o}) = \frac{f}{e} = \rule{1.5em}{0.4pt} =$ Cálculos d Cálculos e

6.3 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 55º$

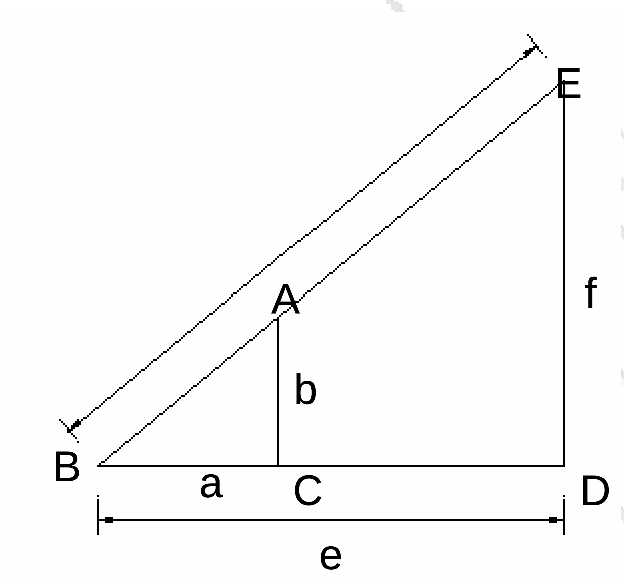
Figura	Razones en el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$	Razones en el triángulo $\overset{\frown}{BDE}$
	$\text{sen}(55º) = \frac{b}{c} = \text{——} =$ $\cos(55º) = \frac{a}{c} = \text{——} =$ $\text{tn}(55º) = \frac{b}{a} = \text{——} =$	$\text{sen}(55º) = \frac{f}{d} = \text{——} =$ $\cos(55º) = \frac{e}{d} = \text{——} =$ $\text{tn}(55º) = \frac{f}{e} = \text{——} =$ Cálculos d Cálculos e
Conclusión Actividad 6		

Actividad 7

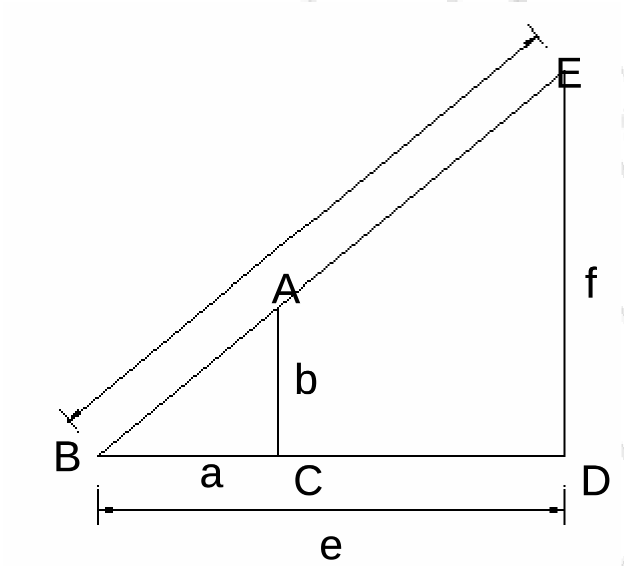
7.1 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 32^\circ$

Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
 	$\text{sen}(32^\circ) = \frac{b}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\cos(32^\circ) = \frac{a}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(32^\circ) = \frac{b}{a} = \frac{\quad}{\quad} =$	$\text{sen}(32^\circ) = \frac{f}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\cos(32^\circ) = \frac{e}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(32^\circ) = \frac{f}{e} = \frac{\quad}{\quad} =$ Cálculos d Cálculos f

7.2 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 43^{o}$

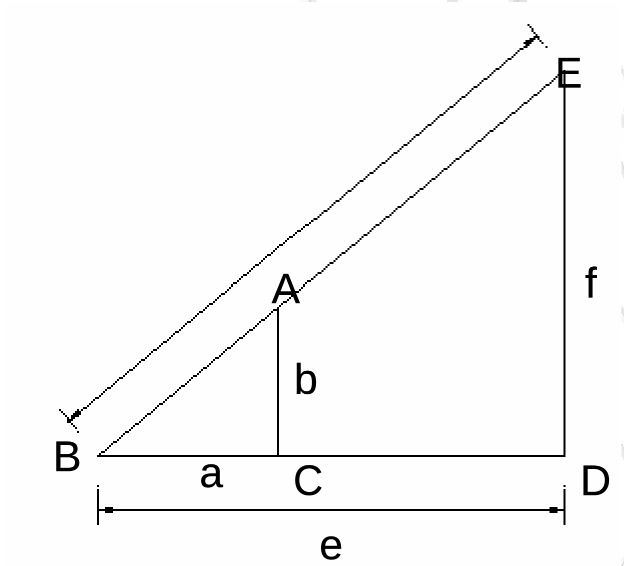
Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
	$\operatorname{sen}(43^{o}) = \frac{b}{c} = \text{——} =$ $\cos(43^{o}) = \frac{a}{c} = \text{——} =$ $\operatorname{tn}(43^{o}) = \frac{b}{a} = \text{——} =$	$\operatorname{sen}(43^{o}) = \frac{f}{d} = \text{——} =$ $\cos(43^{o}) = \frac{e}{d} = \text{——} =$ $\operatorname{tn}(43^{o}) = \frac{f}{e} = \text{——} =$
		Cálculos d
		Cálculos f

7.3 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 56^o$

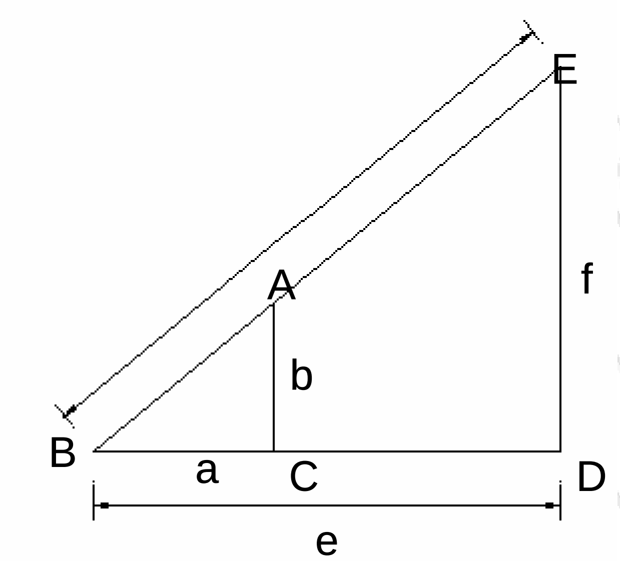
Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
 	$\text{sen}(56^o) = \frac{b}{c} = \text{——} =$ $\cos(56^o) = \frac{a}{c} = \text{——} =$ $\text{tn}(56^o) = \frac{b}{a} = \text{——} =$	$\text{sen}(56^o) = \frac{f}{d} = \text{——} =$ $\cos(56^o) = \frac{e}{d} = \text{——} =$ $\text{tn}(56^o) = \frac{f}{e} = \text{——} =$
		Cálculos d
		Cálculos f
Conclusión Actividad 7		

Actividad 8

8.1 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 25^{o}$

Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
	$\text{sen}(25^{o}) = \frac{b}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\cos(25^{o}) = \frac{a}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(25^{o}) = \frac{b}{a} = \frac{\quad}{\quad} =$	$\text{sen}(25^{o}) = \frac{f}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\cos(25^{o}) = \frac{e}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(25^{o}) = \frac{f}{e} = \frac{\quad}{\quad} =$
		Cálculos e
		Cálculos f

8.2 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 37º$

<table>
<tr><td>Figura</td><td>Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$</td><td>Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">$\operatorname{sen}(37º) = \frac{b}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$

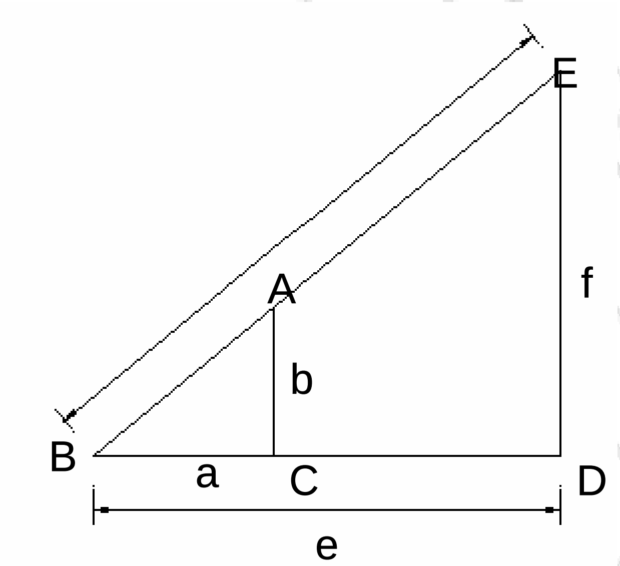
$\cos(37º) = \frac{a}{c} = \frac{\quad}{\quad} =$

$\operatorname{tn}(37º) = \frac{b}{a} = \frac{\quad}{\quad} =$</td><td>$\operatorname{sen}(37º) = \frac{f}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$

$\cos(37º) = \frac{e}{d} = \frac{\quad}{\quad} =$

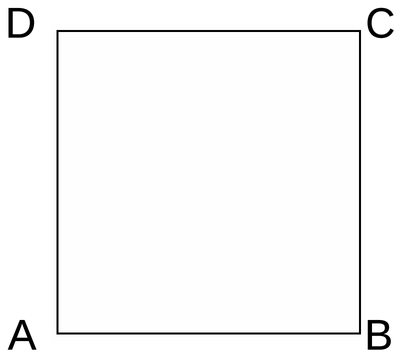
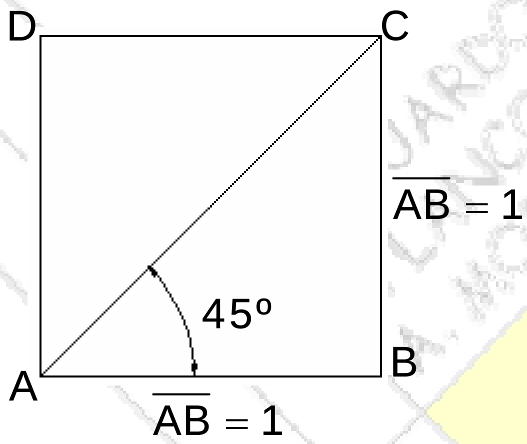
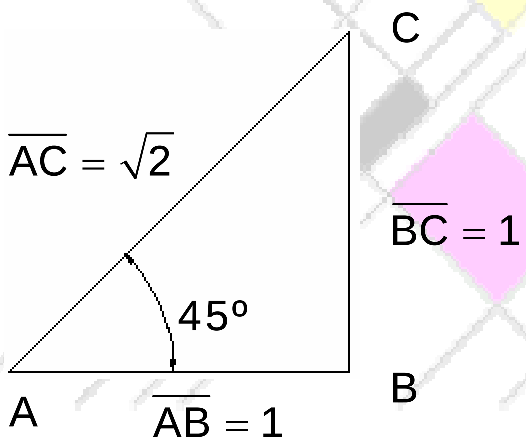
$\operatorname{tn}(37º) = \frac{f}{e} = \frac{\quad}{\quad} =$</td></tr>
<tr><td>Cálculos e</td></tr>
<tr><td>Cálculos f</td></tr>
</table>

8.3 Completa la tabla. Ángulo $\hat{B} = 62^{o}$

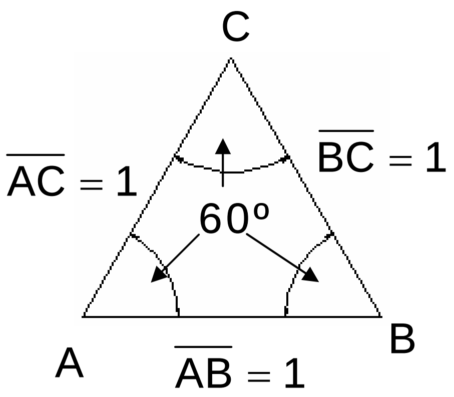
Figura	Razones en el triángulo $\widehat{ABC}$	Razones en el triángulo $\widehat{BDE}$
	$\text{sen}(62^{o}) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ $\cos(62^{o}) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(62^{o}) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} =$	$\text{sen}(62^{o}) = \dfrac{f}{d} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ $\cos(62^{o}) = \dfrac{e}{d} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ $\text{tn}(62^{o}) = \dfrac{f}{e} = \dfrac{\quad}{\quad} =$
		Cálculos e
		Cálculos f
Conclusión Actividad 8		

Calculo de las razones trigonométricas de $45º$, $30º$ y $60º$

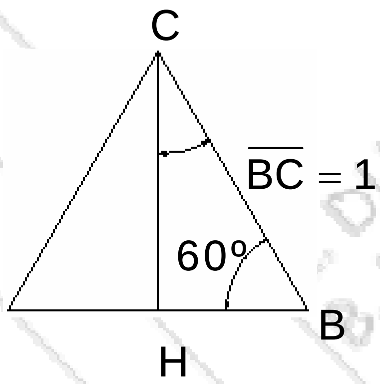
Razones de $45º$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>En el cuadrado de lado 1 pintamos la diagonal $\overline{AC}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Fíjate que si calculamos la diagonal. Conocemos los lados del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ y el ángulo del vértice A; $45º$; entonces podemos calcular las razones de $45º$.
Teorema de Pitágoras
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$ $\quad \overline{AC}^2 = 2$
$\overline{AC} = \sqrt{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\operatorname{sen}(45º) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$
$\cos(45º) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$
$\operatorname{tn}(45º) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \underline{\qquad} =$</td>
</tr>
</table>

Razones de 60^{o}



En un triángulo equilátero, los ángulos son iguales y miden 60^{o}. Elegimos el triangulo equilátero de lado 1. Trazamos la altura de ese triángulo $\overline{CH}$. Y obtenemos el triángulo $\widehat{CHB}$. El lado $\overline{HB}$ es la mitad del lado $\overline{AB}$, entonces $\overline{HB} = \dfrac{1}{2}$



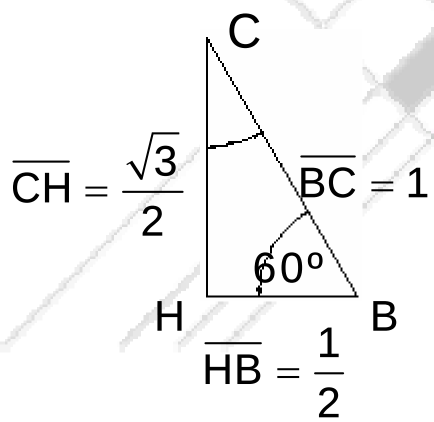
El triángulo $\widehat{CHB}$ es rectángulo. Aplicando el Teorema de Pitágoras podemos calcular el lado $\overline{CH}$

$$\overline{CB}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{CH}^2,\quad 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{CH}^2,$$

$$\overline{CH}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(*)$



$$\operatorname{sen}(60^{o}) = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

$$\cos(60^{o}) = \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

$$\operatorname{tn}(60^{o}) = \frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} =$$

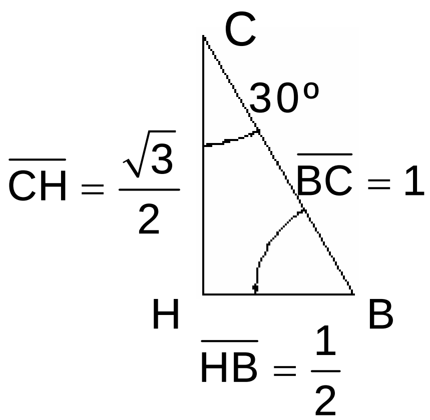
Razones de 30^{o}

Fíjate en la figura $(*)$. El ángulo del vértice C, lo podemos calcular, sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 180^{o}. Entonces como $\widehat{H} = 90^{o}$ y $\widehat{B} = 60^{o}$.

$$\widehat{H} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{o} \qquad \widehat{C} = 180^{o} - 90^{o} - 60^{o} = 180^{o} - 150^{o} = 30^{o}$$

$$\widehat{C} = 30^{o}$$

Entonces podemos calcular las razones trigonométricas de 30^{o}. Completa la tabla

	$sen(30^{o})=\frac{\overline{HB}}{\overline{BC}}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$ $cos(30^{o})=\frac{\overline{\quad}}{\overline{BC}}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$ $tn(30^{o})=\frac{\overline{HB}}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=$

Resumen		
Razones de 45^{o}	Razones de 30^{o}	Razones de 60^{o}
$sen(45^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $cos(45^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $tn(45^{o})=$	$sen(30^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $cos(30^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $tn(30^{o})=\frac{\quad}{\quad}$	$sen(60^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $cos(60^{o})=\frac{\quad}{\quad}$ $tn(60^{o})=$

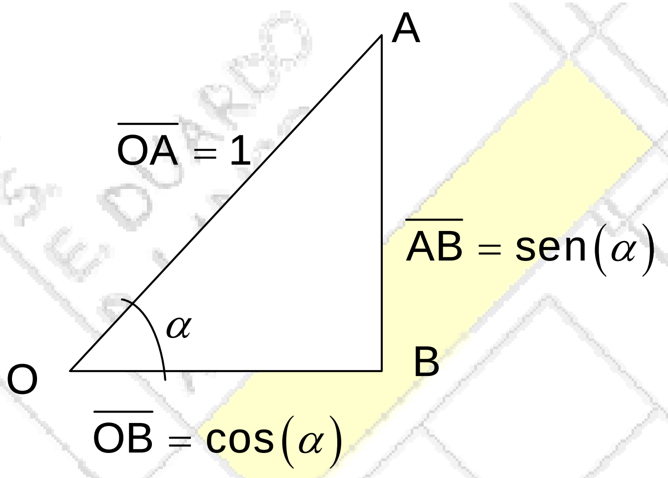
Actividad 9

Dibuja los triángulos con los datas que obtienes de la escena y calcula las razones trigonométricas de

Ángulo	Triángulo con la longitud de sus lados	Razones trigonométricas
$\hat{O} = 12^o$		$\text{sen}(12^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\cos(12^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\text{tn}(12^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$
$\hat{O} = 22^o$		$\text{sen}(22^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\cos(22^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\text{tn}(22^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$
$\hat{O} = 37^o$		$\text{sen}(37^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\cos(37^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\text{tn}(37^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$
$\hat{O} = 65^o$		$\text{sen}(65^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\cos(65^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$ $\text{tn}(65^o) = \frac{}{} = \frac{}{} =$

$\hat{O} = 72º$		$\text{sen}(72º) = \text{——} = \text{——} =$ $\cos(72º) = \text{——} = \text{——} =$ $\text{tn}(72º) = \text{——} = \text{——} =$

Concusión actividad 9



Actividad 10

La relación entre el $\text{sen}(\alpha)$ y el $\cos(\alpha)$ es:

FÓRMULA FUNDAMENTAL

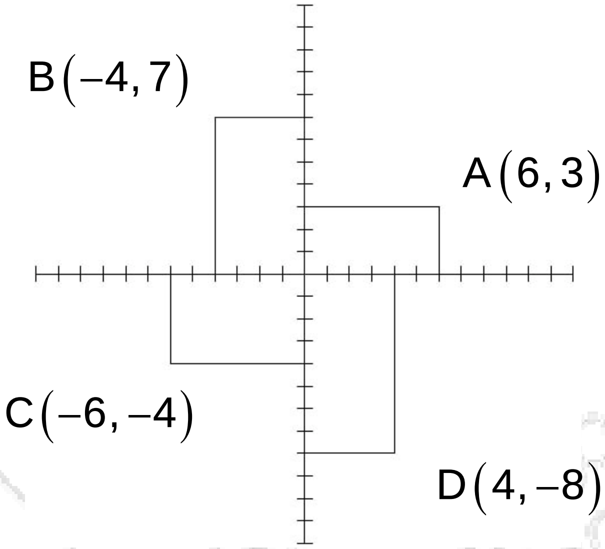
Actividad 11

Ángulo	Datos	Operaciones
$\hat{O} = 39^o$	$\overline{OB} =$ $\overline{OA} =$ $\cos(39^o) = \frac{}{}$	
$\hat{O} = 66^o$	$\overline{OB} =$ $\overline{OA} =$ $\cos(66^o) = \frac{}{}$	
$\hat{O} = 78^o$	$\overline{OB} =$ $\overline{OA} =$ $\cos(78^o) = \frac{}{}$	

Actividad 12

Ángulo	Datos	Operaciones
$\hat{O} = 16^o$	$\overline{AB} =$ $\overline{OA} =$ $\text{sen}(16^o) = \frac{}{}$	
$\hat{O} = 64^o$	$\overline{AB} =$ $\overline{OA} =$ $\text{sen}(64^o) = \frac{}{}$	
$\hat{O} = 80^o$	$\overline{AB} =$ $\overline{OA} =$ $\cos(80^o) = \frac{}{}$	

Recuerda que

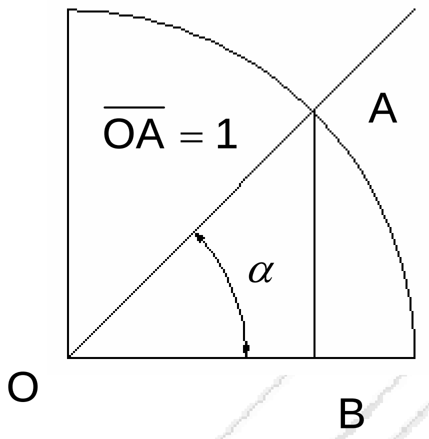


La posición de un punto en el plano viene dada por un par ordenado de números, que se llaman coordenadas del punto.

La primera coordenada se mide sobre el eje de abscisas; se llama **abscisa del punto**.

La segunda coordenada se mide sobre el eje de ordenadas; se llama **ordenada del punto**.

Actividad 13



$\overline{AB} = \text{sen}(\alpha)$

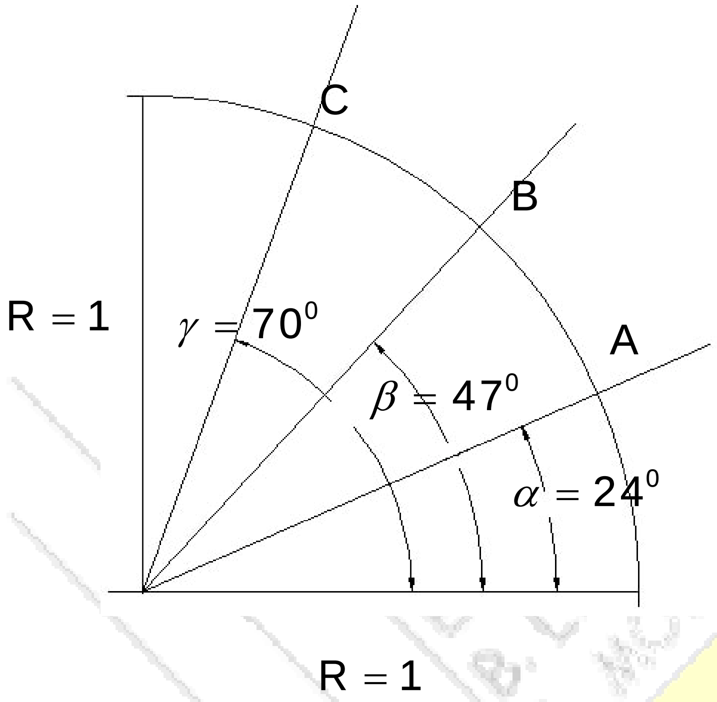
$\overline{OB} = \cos(\alpha)$

Coordenadas del punto A en función del ángulo α

$A(\qquad\qquad , \qquad\qquad)$

Actividad 14

Completa la tabla

<table>
<tr><td></td><td>Coordenadas en función del ángulo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$A\left(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)\right) =$
$A\left(\cos(24^0), \operatorname{sen}(24^0)\right) =$
$A(\qquad , \qquad) =$</td></tr>
<tr><td>$B\left(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta)\right) =$
$B\left(\cos(\quad ^0), \operatorname{sen}(\quad ^0)\right) =$
$B(\qquad , \qquad) =$</td></tr>
<tr><td>$C\left(\cos(\gamma), \operatorname{sen}(\gamma)\right) =$
$C\left(\cos(\quad ^0), \operatorname{sen}(\quad ^0)\right) =$
$C(\qquad , \qquad) =$</td></tr>
</table>

Recuerda que.

Si Un ángulo α mide	Esta en
$0^0 < \alpha < 90^0$ o $0\,\text{rad} < \alpha < \frac{\pi}{2}\text{rad}$	1^{er} Cuadrante
$90^0 < \alpha < 180^0$ o $\frac{\pi}{2}\text{rad} < \alpha < \pi\,\text{rad}$	2^{o} Cuadrante
$180^0 < \alpha < 270^0$ o $\pi\,\text{rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\text{ rad}$	3^{er} Cuadrante
$270^0 < \alpha < 360^0$ o $\frac{3\pi}{2}\text{rad} < \alpha < 2\pi\,\text{rad}$	4^{o} Cuadrante

Actividad 15

1^{er} Cuadrante

Ángulo $\widehat{AOB}$	Razones del ángulo $\widehat{AOB}$	Coordenadas del punto A
	$\operatorname{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\operatorname{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\operatorname{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$
	$\operatorname{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\operatorname{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\operatorname{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$
	$\operatorname{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\operatorname{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\operatorname{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$

2^{o} Cuadrante

Ángulo $\widehat{AOB}$	Razones del ángulo $\widehat{AOB}$	Coordenadas del punto A
	$\operatorname{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\operatorname{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\operatorname{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$
	$\operatorname{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\operatorname{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\operatorname{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$

	$\text{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\text{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\text{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$

3er Cuadrante

Ángulo $\widehat{AOB}$	Razones del ángulo $\widehat{AOB}$	Coordenadas del punto A
	$\text{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\text{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\text{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$
	$\text{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\text{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\text{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$
	$\text{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\text{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\text{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$

4^{o} Cuadrante

Ángulo $\widehat{AOB}$	Razones del ángulo $\widehat{AOB}$	Coordenadas del punto A
	$\text{sen}(\quad)=$ $\cos(\quad)=$ $\text{tn}(\quad)=\frac{\quad}{\quad}=$	$A(\cos(\quad),\text{sen}(\quad))=$ $A(\quad,\quad)$

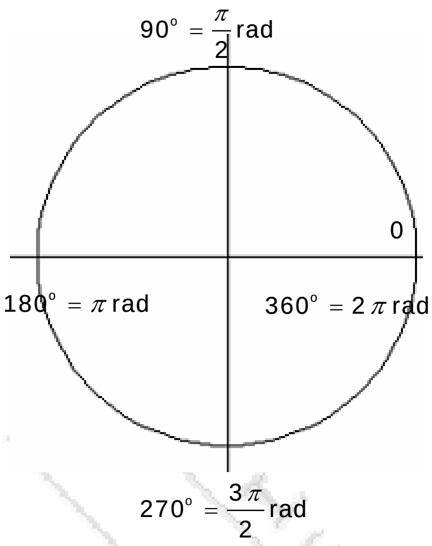
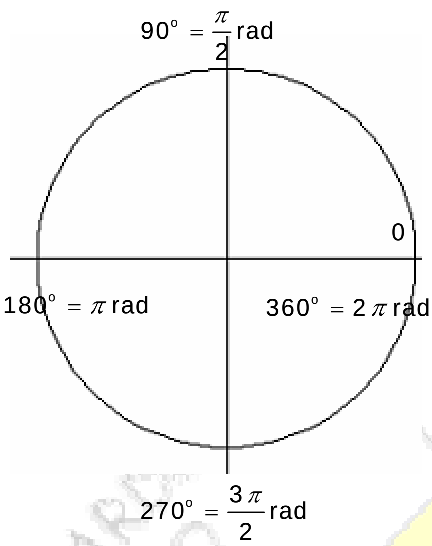
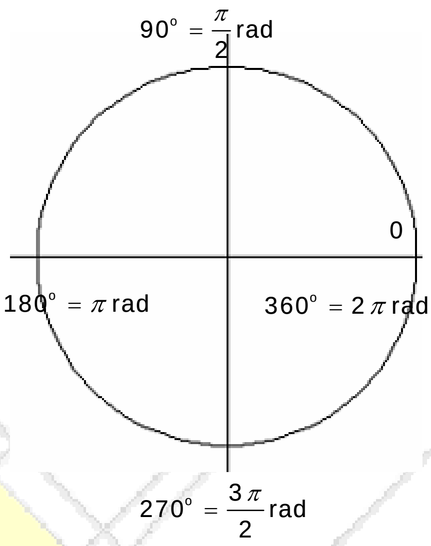
	$sen(\quad) =$ $cos(\quad) =$ $tn(\quad) = \frac{\quad}{\quad} =$	$A(cos(\quad), sen(\quad)) =$ $A(\quad , \quad)$
	$sen(\quad) =$ $cos(\quad) =$ $tn(\quad) = \frac{\quad}{\quad} =$	$A(cos(\quad), sen(\quad)) =$ $A(\quad , \quad)$

Signos de las razones trigonométricas

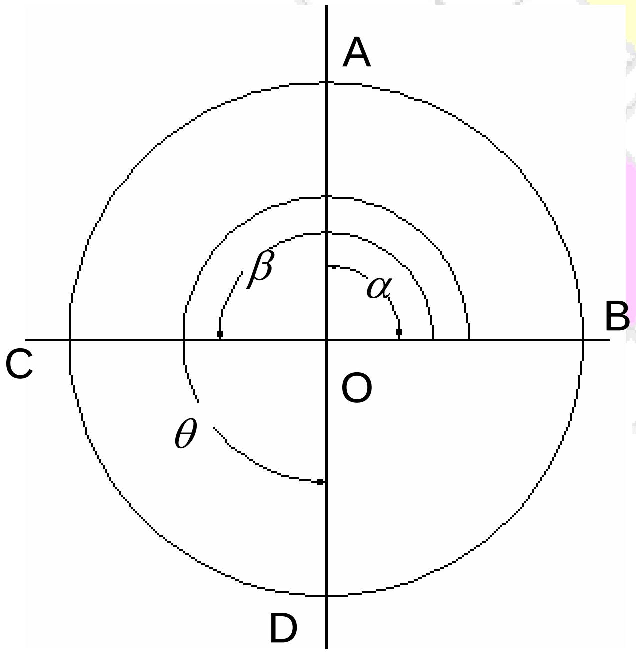
De la actividad anterior puedes deducir que dependiendo del cuadrante en el que este el ángulo las razones trigonométricas tienen distintos signos. Intenta determinar esos los signos con la escena.

α esta en	Razón trigonométrica	Signo
1^{er} Cuadrante	$sen(\alpha)$	
	$cos(\alpha)$	
	$tn(\alpha)$	
2^{o} Cuadrante	$sen(\alpha)$	
	$cos(\alpha)$	
	$tn(\alpha)$	
3^{er} Cuadrante	$sen(\alpha)$	
	$cos(\alpha)$	
	$tn(\alpha)$	
4^{o} Cuadrante	$sen(\alpha)$	
	$cos(\alpha)$	
	$tn(\alpha)$	

Resumen

 Signos seno	 Signos coseno	 Signos tangente

15.2 Fíjate en los puntos A, C, D. Determina sus coordenadas, de esos puntos, los ángulos $\alpha = \widehat{AOB}$, $\beta = \widehat{COB}$ y $\theta = \widehat{DOB}$, en grados y en radianes.

Circunferencia radio 1	Coordenadas Puntos	Ángulos	Razones trigonométricas
	A(,)	Grados $\alpha =$ Radianes $\alpha =$	sen( ) = cos( ) = tn( ) =
	C(,)	Grados $\beta =$ Radianes $\beta =$	sen( ) = cos( ) = tn( ) =
	D(,)	Grados $\theta =$ Radianes $\theta =$	sen( ) = cos( ) = tn( ) =

Razona sobre la figura anterior y da el valor de las razones trigonométricas de 0^o, 360^o o $0\,rad$, $2\pi\,rad$

Ángulos	Razones trigonométricas
0^o o $0\,rad$,	$sen(\quad) =$ $cos(\quad) =$ $tn(\quad) =$
360^o , $2\pi\,rad$	$sen(\quad) =$ $cos(\quad) =$ $tn(\quad) =$

Actividad 16

Teniendo en cuenta los signos de las razones trigonométricas y la fórmula fundamental. Completa la siguiente tabla.

Ángulo	Razón conocida	Cálculos para el	Cálculos para la
135^o	$sen(135^0) = 0,71$		
240^o	$cos(240^0) = -0,5$		
350^o	$cos(350^0) = 0,98$		