Programación Lineal

1. Contenido

1.1 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
1.2 Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
1.3 Problemas de programación lineal.
1.4 Solución gráfica de un problema de programación lineal.
1.5 Problemas de programación lineal con múltiplos óptimos.
1.6 Problemas de programación lineal con región factible no acotada.
1.7 Problemas de programación lineal con región factible vacía.
1.8 Programación lineal entera.

2. Enlace

En este tema trabajaremos con la Unidad Didáctica de Descartes

PROGRAMACIÓN LINEAL

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Programacion_lineal/index.htm

3. Inecuaciones

Lee la página de inicio de la U.D. en la que tienes la Introducción y los Objetivos de la misma y pasa a la página "Inecuaciones" pinchando en el enlace "Inecuaciones" del "Índice" situado a la derecha.
Lee atentamente la definición de inecuación lineal con dos incógnitas y realiza en tu cuaderno el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1. Usando la segunda escena, resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 12$$
$$x + 3y \leq 12$$
$$x + y \geq 1$$
$$x + y - 2 \geq 0$$

Observa cómo funciona la tercera escena de la página. Pulsa el botón izquierdo del ratón sobre el área de trabajo de la escena y aparecerán las coordenadas del punto marcado.

Ejercicio 2. Usando la tercera escena, resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:
a) $-7x + 5y \leq 10$; $-7x + 3y \geq -15$
b) $2x + 5y \leq 20$; $5x + 2y \leq 20$
c) $3x - y \geq -2$; $x + y \leq 10$
d) $3x + 2y \geq 6$; $6x + y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Ejercicio 3. Comprueba en cuáles de las regiones anteriores está el punto P(2,3).

4. Programación lineal

Para pasar a la página "Programación lineal" pincha sobre la flecha "" de la esquina inferior derecha de la página anterior o sobre el enlace Programación lineal si estás en la página de inicio de la U.D.

En esta página tienes la definición de un problema de programación lineal.

Debajo de la definición tienes una escena en la que debes buscar la solución al problema moviendo el punto negro. Fíjate en que la solución se alcanza en uno de los vértices de la región factible.

La observación anterior es consecuencia del **Teorema fundamental de la Programación Lineal**:

Si un problema de Programación Lineal tiene región factible no vacía y acotada, entonces, si existe el óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo, se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible.

Si una función alcanza el valor óptimo en dos vértices consecutivos de la región factible, entonces alcanza también dicho valor óptimo en todos los puntos del segmento que determinan ambos vértices.

Usando el teorema llegamos a un método para resolver problemas de optimización, el **método analítico**. Este método consiste en evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible.

Para calcular los puntos de corte de dos rectas puedes usar la segunda escena (Escena 3) de la siguiente página.

Para evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible puedes usar la primera escena (Escena 4) de la siguiente página.

Ejercicio 4. Minimizar la función $\mathbf{F = 12x + 4y}$ sujeta a las siguientes restricciones:
$x + y \geq 2$; $2x \leq 1$; $y \leq 4$; $x - y \leq 0$

Ejercicio 5. Maximizar $z = 3x + 2y$ sujeta a:
$-7x + 5y \leq 10$; $-7x + 3y \geq -15$; $2x - 3y \leq -10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Ejercicio 6. Minimizar $z = 2x + 3y$, sujeta a las condiciones: $3x + y \geq 3$; $2x + 8y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Ejercicio 7. Minimizar $z = 15x + 33y$, sujeta a $3x + 2y \geq 6$; $6x + y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

5. Método gráfico

Además del método analítico que ya hemos visto, vamos a estudiar otro el método gráfico o mediante rectas de nivel. Este método nos permite determinar si un problema de programación lineal con región factible no acotada tiene o no solución.

Lee el apartado 2 de la página "Programación Lineal" y realiza los dos ejercicios que tienes a la derecha de cada escena.

Usando la última escena que tienes en esta página si lo crees conveniente, realiza los siguientes ejercicios:

Ejercicio 8. Calcula el máximo y el mínimo de la función F(x,y) = x – y + 2 en la región definida por: $-2 \leq x+y \leq 2$; $x \leq y$.

Ejercicio 9. Calcula el máximo y el mínimo de la función F(x,y) = 2 – y en la región definida por: $-١ \leq x+y \leq ٥$; $x \leq ١+y$.

6. Programación lineal entera

Un problema se dice que es de programación lineal entera si sus soluciones deben ser números enteros, por ejemplo:

Un barco se dedica al transporte de mercancías y pasajeros entre dos puertos de la costa mediterránea. En concreto, transporta vehículos de dos modelos X e Y. Cada coche del modelo X ocupa 7 m^2 y cada uno del modelo Y ocupa 4 m^2. La superficie disponible para transporte de coches es de 28 m^2, y, por otra parte, existe un contrato que prohíbe transportar en cada trayecto más de 5 coches. Si el beneficio neto por transportar cada coche del modelo X es de 200€ y de 150€ por cada uno del modelo Y, ¿cuántos coches deberá transportar por trayecto con el fin de maximizar los beneficios?

Ejercicio 10. Resuelve el ejemplo anterior. Fíjate en que la solución no se encuentra en un vértice sino en un punto de coordenadas enteras cercano al vértice.

7. Ejercicios de examen

Ejercicio 1-
(3 puntos) Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y la de tipo B 300000 euros.
Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 euros y por una de tipo B a 40000 euros, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

Ejercicio 2-

Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$y - x \leq 4$; $y + 2x \geq 7$; $-2x - y + 13 \geq 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) **(2 puntos)** Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(1 punto)** Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x,y) = 4x + 2y - 1$.

Ejercicio 3-

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$4x + 3y \geq 60$; $y \leq 30$; $x \leq \dfrac{10+y}{2}$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) **(2 puntos)** Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Maximice en esa región la función objetivo $F(x,y) = x + 3y$.

c) **(0.5 puntos)** ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

Ejercicio 4-

(3 puntos) Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2.5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.

La producción de una luna delantera precisa 0.3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0.2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

Ejercicio 5-

La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (*x*) no debe exceder del doble del número de mujeres (*y*).

a) **(2.5 puntos)** Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

Ejercicio 6-

(3 puntos) Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1.5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.

Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.