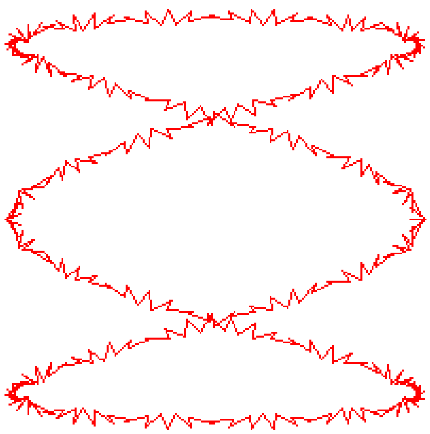
CLASE 9
CURVAS PARAMÉTRICAS

Para esta clase hemos preparado tres elementos que complementan los ya estudiados en las clases anteriores: curvas paramétricas en 2D, controles tipo botón y uso del **dibuja-si** con expresiones booleanas compuestas.



Las ecuaciones paramétricas posibilitan una gran variedad de curvas, algunas conocidas, otras extrañas, algunas complejas, otras sorprendentes por su simetría y belleza. Estas curvas se generan cuando las variables *x* e *y* se expresan en función de una tercera llamada parámetro. En gráficos 2D se usa el parámetro *t* y en gráficos 3D los parámetros *u* y *v.*

Si *x* e *y* se dan como funciones de una tercera variable *t* (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones x = f(t) e y=g(t) (llamadas **ecuaciones paramétricas**), entonces cada valor de *t* determina un punto (*x*,*y*) que se puede representar en un sistema de coordenadas. Cuando *t* varía, el punto (*x,y*)= (f(t),g(t)) varía y traza una curva *C* (llamada **curva paramétrica)**.

El estudio de estas curvas demanda más tiempo del que nos proponemos con este tutorial. Nuestro objetivo es sólo mostrar cómo se representan estas curvas en el Proyecto Descartes.

Algunas curvas que usaremos en esta clase se describen a continuación. Algunas de ellas fueron consultadas en http://www.iesaltoalmanzora.com/, otras, en especial las episicloides, fueron consultadas en el aporte de Rita Jiménez Igea en http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/cicloides/cicloides.htm, ver también estas páginas: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Curvas_en_parametricas/index.htm de Ricardo Sarandeses Fernández y una amplia colección de curvas en http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml.

Lemniscata de Bernoulli. La lemniscata fue descrita por primera vez en 1694 por Jakob Bernoulli como la modificación de una elipse, curva que se define como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias desde dos puntos focales es una constante. En contraposición, una lemniscata es el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de estas distancias es constante. Bernoulli la llamó *lemniscus*, que en latín significa "cinta colgante". Su figura es el símbolo usado en matemáticas para representar *infinito* (∞).

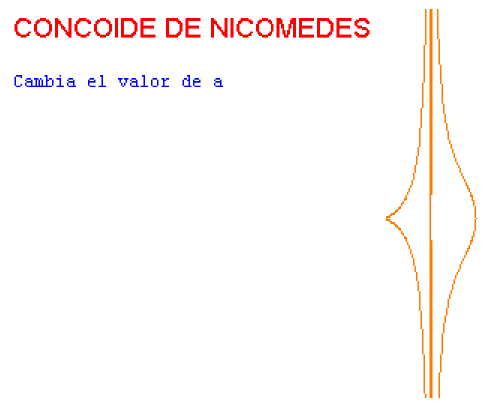
Ecuación: $x=a\,sen(t)/(1+\cos^2(t))$ $y=a\,sen(t)\cos(t)/(1+\cos^2(t))$

Cisoide. Curva formada por dos ramas simétricas que parten de un mismo punto y tienen una asíntota común. Diocles (~250 - ~100 aC) inventó esta curva para solucionar el problema de la duplicación del cubo (problema de Delian). El nombre de cisoide (forma de hiedra) proviene de la forma de la curva. Posteriormente el método usado para generar esta curva se generalizó y a las curvas obtenidas por dicho método se las denomina cisoides.

Ecuación: $x = 2a\,\mathrm{sen}^2(t)$ $y = 2a\,\mathrm{sen}^3(t)/\cos(t)$

Concoide. Conocidas como concoides de Nicomedes en honor a un erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la de una concha de un caracol o de un mejillón.

Ecuación: $x = a + \cos(t)$ $y = \mathrm{atan}(t) + \mathrm{sen}(t)$



Epicicloide. Específicamente, las epi/hipocicloide son las trazas de un punto en un círculo rodando sobre otro círculo sin deslizamiento. Cuando el círculo rueda por el exterior se tiene una epicicloide, cuando lo hace por el interior tenemos una hipocicloide. Notemos que cuando un círculo esté en el interior de otro ambos pueden ser los círculos rodantes.

Rita Jiménez nos da la siguiente descripción: "*Las epicicloides ordinarias son curvas que se generan por un punto P de una circunferencia de radio b al girar exteriormente y sin deslizamiento sobre otra circunferencia de radio a. Un caso sencillo de epicicloide es aquel en que la relación de radios a/b es un número entero. Dando una sola vuelta completamos la epicicloide y ésta tendrá n cúspides".*

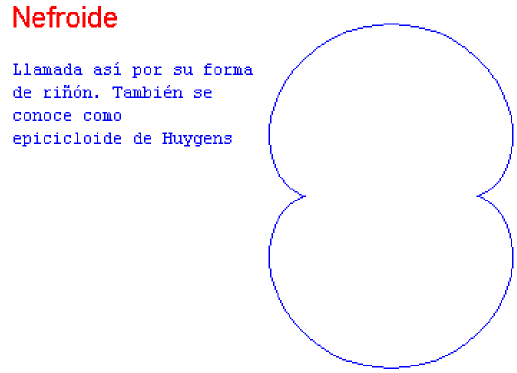
Ecuaciones

$x = (a+b)\cos(t) - b\cos((a+b)t/b)$ $y = (a+b)\mathrm{sen}(t) - b\,\mathrm{sen}((a+b)t/b)$

$x = (a-b)\cos(t) + b\cos((a-b)t/b)$ $y = (a-b)\mathrm{sen}(t) - b\,\mathrm{sen}((a-b)t/b)$

Nefroide. Curva tipo epicicloide. El nombre nefroide ("forma de riñón") fue utilizado para una epicicloide de dos cúspides por Proctor en 1878; un año después, Freeth usó el mismo nombre para otra curva, la nefroide de Freeth.

Ecuación: $x = 3\cos(t) - \cos(3t)$ $y = 4\,\mathrm{sen}^3(t)$



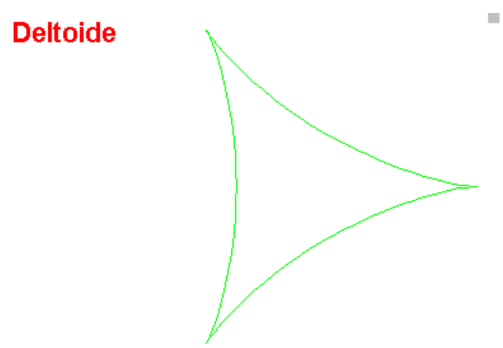
Astroide. Las curvas tipo hipocicloide, incluyendo la astroide, fueron descubiertas por Roemer (1674) en su búsqueda de la forma óptima para los engranajes. Fue estudiada por Johann Bernoulli. La doble generación fue advertida en primer lugar por Daniel Bernoulli en 1725. El nombre de astroide apareció por vez primera en 1838, en un libro publicado en Viena; antes fue conocida con distintos nombres como cubocicloide, paraciclo, curva tetracúspide.

Ecuación: $x = a \cos3 (t)$, $y = a \sin3 (t)$

Cicloide. Es el lugar geométrico de un punto situado a una distancia h del centro y que rueda a lo largo de una línea recta. Si $h < a$ se tiene una cicloide acortada*, mientras que si* $h > a$ se tiene una cicloide alargada. La cicloide fue estudiada por vez primera por Nicolás de Cusa cuando intentaba encontrar el área de un círculo por integración.

Ecuación: $x = at - h \sin(t)$, $y = a - h \cos(t)$

Deltoide. Curva tipo hipocicloide concebida por Euler en 1745 en conexión con el estudio de las curvas cáusticas. Fue también investigada por Steiner en 1856 y a veces se le denomina hipocicloide de Steiner.



Ecuación $x = a(2\cos(t)+\cos(2t))$, $y = a(2\sin(t)-\sin(2t))$

Actividad 1. Escena con curvas paramétricas

1.1 En un archivo nuevo que llamaremos **clase 9** crearemos una escena Descartes4 y un espacio 2D, sin redes, botones, ni ejes; con escala de 5 y el eje y desplazado a la derecha un 20% (O.x=10%)

Añade los siguientes controles:

a: control numérico tipo pulsador con valor inicial de 12, incremento 1 y cero decimales. Este control, al igual que b y c, es utilizado en las ecuaciones paramétricas como variable que permite mostrar cambios interesantes en las curvas, especialmente las epicicloides e hipocicloides.

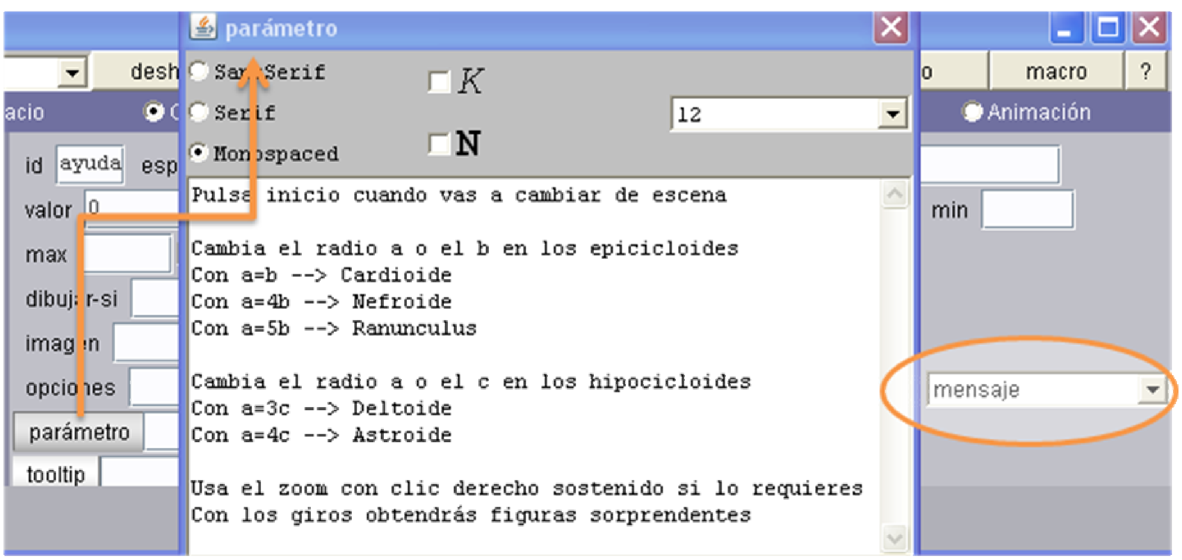
b: control numérico tipo pulsador con valor inicial de 12, incremento 1 y cero decimales.

c: control numérico tipo pulsador con valor inicial de 4, incremento 1 y cero decimales.

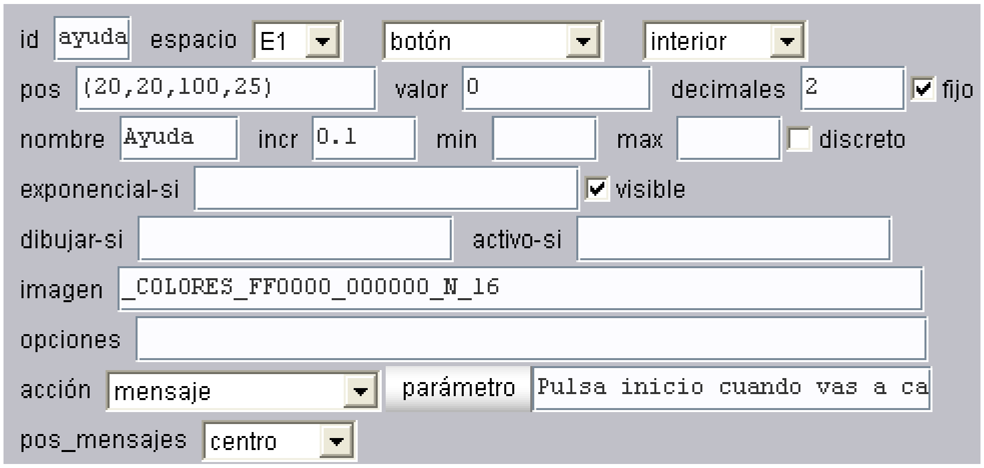
giros: control numérico tipo pulsador con valor inicial de 1, incremento 1 y cero decimales. Este control es el que permite generar curvas como la representada al inicio de esta clase.

menú: control numérico tipo menú con posición y tamaño **pos** = (400,20,185,25), ubicado en el interior de la escena y con las siguientes opciones: aperitivo[1],epicicloides[2],hipocicloides[3],concoide[4],lemniscate[5]

ayuda: control numérico tipo botón ubicado en el interior de la escena en la posición (20,20), con ancho 100 y alto 25; es decir: pos = (20, 20, 100, 25). Este botón permite varias acciones para su parametrización: mensaje, calcular, abrir URL, abrir escena, créditos, config, inicio, limpiar, animación y reiniciar animación. Observa que incluye los mismos botones que trae Descartes por defecto, su utilidad es poderlos ubicar en otro sitio de la escena. Usaremos para esta actividad la acción **mensaje** con el siguiente parámetro:



Es decir, haces clic en el botón **parámetro** y escribes el texto anterior, el cual aparecerá en la escena una vez el usuario clique en el botón de ayuda. Finalmente, vamos a signarle color al botón y al texto; para ello, en la casilla imagen, escribes: _COLORES_FF0000_000000_N_16



Esto significa que el fondo el botón será de color rojo (FF0000), el texto será de color negro (000000), en negrilla (N) y de tamaño 16.

Inicio. Control numérico tipo botón, su acción es "Inicio", puedes usar pos = (130, 20, 100, 25) y diseño del botón como: _COLORES_00FF00_000000_N_16 (en la casilla imagen.

1.2 Añadiremos las siguientes curvas y textos:

1.2.1 (25*cos(3*t)-cos(180*t),25*sen(t)-sen(180*t))

Esta es la curva que aparece al inicio de la escena. Tiene configurado el parámetro t en un intervalo [0,2*pi*giros] y pasos=400 (ver explicación al final de la clase).

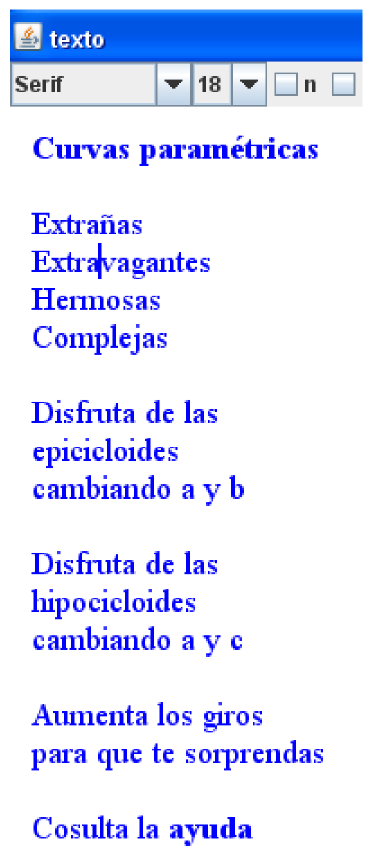
Tanto la curva como el texto debe aparecer sólo si:

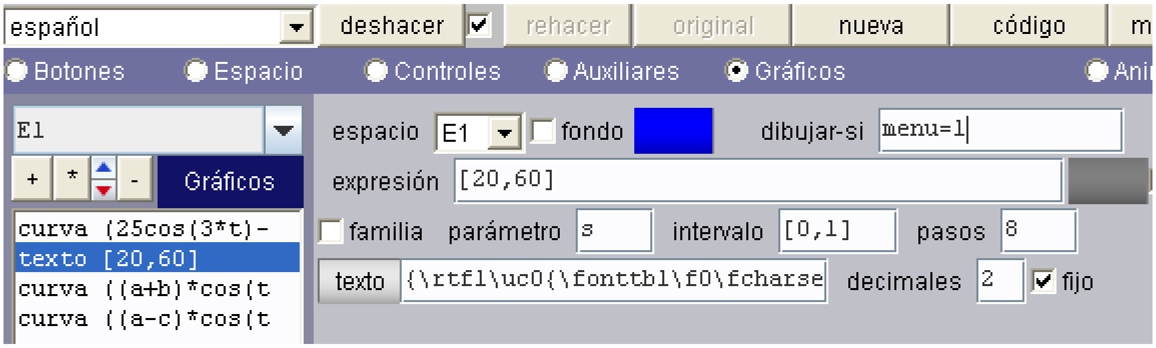
Dibujar-si menu = 1

Es decir, en el cuadro de Dibujar-si escribimos la proposición menú=1, lo cual significa que tanto la curva como el texto aparecerán cuando la proposición es verdadera.

Todos los textos los ubicaremos en la posición [20,60]. Esto se escribe en el campo **expresión.**

Ver imagen de abajo.

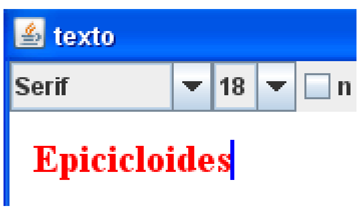




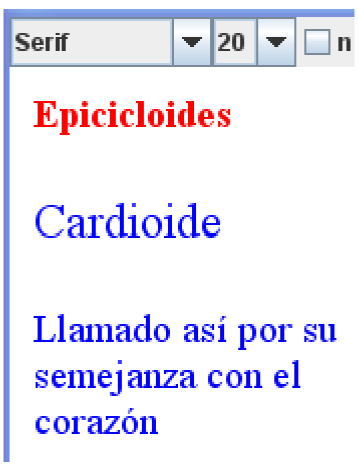
1.2.2 ((a+b)*cos(t) -b*cos((a+b)*t/b),(a+b)*sen(t)-b*sen((a+b)*t/b))

Esta curva debe dibujarse si en **dibujar-si menu = 2.** Es la ecuación que genera las epicicloides. Hemos configurado el parámetro t en el intervalo [0,2*pi*giros] y pasos=100.

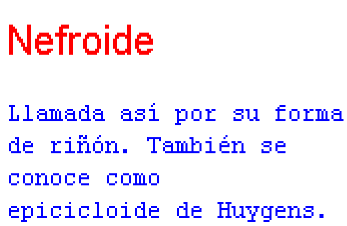
Adicionalmente la acompañaremos de tres textos con un si booleano especial:



Texto que aparece se menú=2



Este texto sólo debe aparecer en la opción de menu = 2 y cuando a = b. Eso quiere decir que en la casilla para **dibujar-si** escribiremos (a=b)&(menu=2). Esta es una proposición compuesta (conjunción) que sólo es verdadera cuando las proposiciones (a=b) y (menu=2) son verdaderas.



Expresión que debe aparecer cuando a=2b y menú=0. Se trata de otra curva epicicloide. En **dibuja-si** escribimos (a=2b)&(menu=1).

1.2.3 ((a-c)*cos(t) +c*cos((a-c)*t/c),(a-c)*sen(t)-c*sen((a-c)*t/c)).

Son las hipocicloides que se dibujan sin menu=3. Tiene la misma configuración para el parámetro t que la anterior. Deben aparecer dos textos similares a los anteriores: el deltoide y el astroide, ver el texto que escribimos para el botón de ayuda. Te los dejamos como ejercicio.

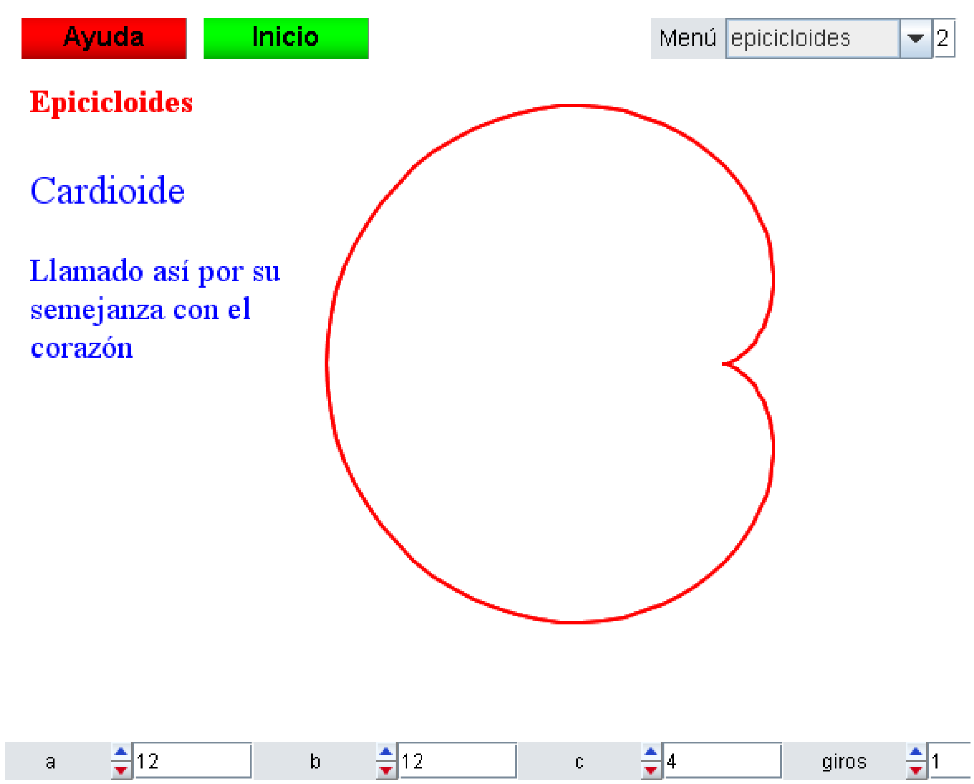
1.2.4 (-3+a/12+10*cos(t),5*(-3+a/12)*tan(t)+5*sen(t)).

Es la ecuación para la concoide de Nicomedes. Tiene configurado el parámetro t en un intervalo [0,2*pi*giros] y pasos=400. Aparece si menú=4. Recuerda de colocarle el título o texto de entrada.

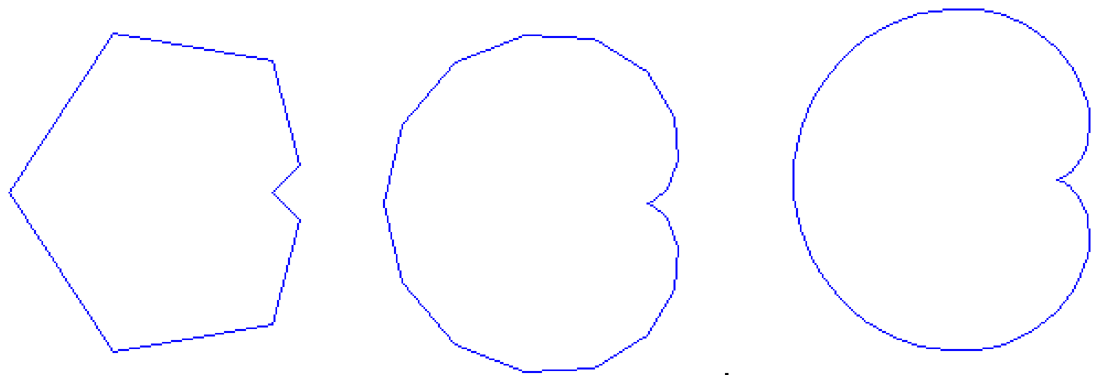
1.2.5 (2*a*sen(t)/(1+cos(t)^2),2*a*sen(t)*cos(t)/(1+cos(t)^2)).

Es la ecuación de la lemniscata de Bernoulli. Tiene configurado el parámetro t en un intervalo [0,2*pi*giros] y pasos=100. Hemos agregado el coeficiente 2 en cada expresión sólo para amplificar la curva resultante al inicio.

La siguiente es una imagen de nuestra escena:



¿Por qué pasos de 100 o 400? En la imagen de abajo aparece el cardioide dibujado con 8, 20 y 100 pasos. La primera figura de 8 pasos está conformada por 8 segmentos, mientras más segmentos usemos mejor nos quedará la curva que estamos buscando. Tampoco se puede abusar del número de segmentos, ello afectaría la rapidez de la escena.



Bueno esto es todo. Usa colores diferentes, otras curvas y textos según tu gusto o necesidades.

Hasta pronto. En www.descartes3d.blogspot podrás practicar con el *applet* final.

Juan Guillermo Rivera Berrío